

PROBLEMA 1: Il porta scarpe da viaggio

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa.

L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero.

Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto. Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe.

Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo:

1. Scelto un riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponda a un decimetro, individua, tra le seguenti funzioni, quella che possa meglio corrispondere al profilo descritto, e giustifica la risposta:

$$y = e^{(ax^2+bx+c)} + (x+d)^2 \quad a, b, c, d \in R, x \in [0,3]$$

$$y = \frac{\sin^2(ax+b) + \cos^2(ax+b)}{cx+d} \quad a, b, c, d \in R, x \in [0,3]$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a, b, c, d \in R, x \in [0,3]$$

2. dopo aver scelto la funzione che meglio rappresenta il profilo determina i valori dei parametri $a, b, c, e d$ in base alle dimensioni definite dall'artigiano;
3. studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano Oxy ; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.

L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente;

4. mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

PROBLEMA 2: Il ghiaccio

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE ON DEMAND sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume 10 dm^3 , che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Studia la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e rappresentala graficamente;
2. determina il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h , e commenta il risultato trovato.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C , uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C ; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente;

3. scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t , dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-Kt}$$
$$T(t) = (T_a - T_g) \cdot (1 - e^{-Kt}) + T_g$$
$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-Kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K , che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm , raggio della base maggiore eguale a $1,5 \text{ dm}$, e altezza eguale a 2 dm ;

4. sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del $9,05\%$, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

INDICATORI DI VALUTAZIONE dei problemi

<p style="text-align: center;">Comprendere</p> <p style="text-align: center;">Analizzare la situazione problematica, identificare i dati ed interpretarli .</p>
<p style="text-align: center;">Individuare</p> <p style="text-align: center;">Mettere in campo strategie risolutive e individuare la strategia più adatta.</p>
<p style="text-align: center;">Sviluppare il processo risolutivo</p> <p style="text-align: center;">Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.</p>
<p style="text-align: center;">Argomentare</p> <p style="text-align: center;">Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia applicata, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati.</p>

QUESTIONARIO

1. Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte?
2. Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola nel punto di ascissa 2 e nel suo simmetrico rispetto all'asse di simmetria della parabola.
3. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto $[1,1,1]$ al piano di equazione $2x - 3y + z = 0$.

4. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - kx + h & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Determinare i parametri h e k in modo che $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo $[0,4]$.

5. Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo del grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\frac{1}{2^x} + 1}$$

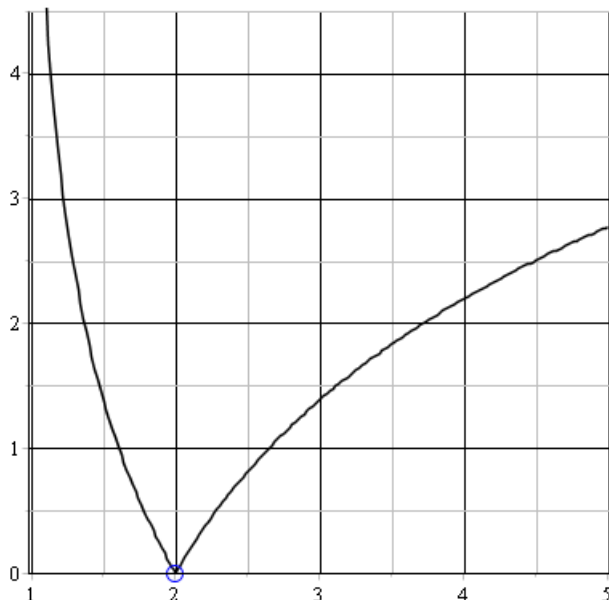
4

6. Risolvere la seguente equazione :

$$6 \cdot \binom{x}{5} = \binom{x+2}{5}$$

7. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$, dopo aver determinato il campo di esistenza ricerca l'eventuale asintoto verticale.
8. Determina, utilizzando la definizione, la derivata prima della seguente funzione:
 $y = \sin 2x$ e generalizza il risultato per $y = \sin nx$ con $n \in \mathbb{N}$.
9. Un oggetto viene lanciato verso l'alto; supponendo che $h(t) = 40t - 2t^2$ sia la legge oraria del suo moto espressa in metri, determina la funzione velocità e la quota massima raggiunta dall'oggetto.

10. Analizza il grafico della funzione $y = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$ e studiane i punti di discontinuità:



Dopo aver individuato il tipo di discontinuità scrivi l'espressione della funzione che può essere ottenuta con un prolungamento per continuità.

5

INDICATORI DI VALUTAZIONE del questionario

COMPRESIONE e CONOSCENZA

*Comprensione della richiesta.
Conoscenza dei contenuti matematici.*

ABILITA' LOGICHE e RISOLUTIVE

*Abilità di analisi.
Uso di linguaggio appropriato.
Scelta di strategie risolutive adeguate.*

CORRETTEZZA dello SVOLGIMENTO

*Correttezza nei calcoli.
Correttezza nell'applicazione di Tecniche e Procedure anche grafiche.*

ARGOMENTAZIONE

Giustificazione e Commento delle scelte effettuate.