Attività di recupero

LE CONICHE E LA RISOLUZIONE GRAFICA DI EQUAZIONI

Rivedi la teoria

La rappresentazione grafica di particolari curve: le curve irrazionali

Mediante lo studio delle coniche possiamo costruire in modo semplice il grafico di alcune funzioni irrazionali.

Per tracciare il grafico della funzione $y = \sqrt{f(x)}$, poste le condizioni $f(x) \geq 0$ e $y \geq 0$, si costruisce il grafico di $y^2 = f(x)$ e di tale grafico si considera solo la parte che appartiene al semipiano positivo o nullo delle ordinate.

Analogamente, per tracciare il grafico della funzione $y = -\sqrt{f(x)}$, poste le condizioni $f(x) \geq 0$ e $y \leq 0$, si costruisce il grafico di $y^2 = f(x)$ e di tale grafico si considera solo la parte che appartiene al semipiano negativo o nullo delle ordinate.

Arco di parabola

ESERCIZIO GUIDA

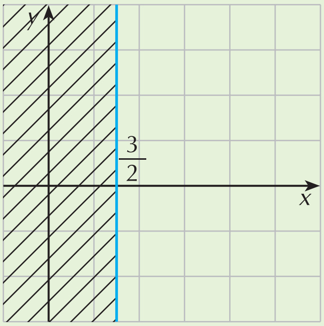
Tracciamo il grafico della curva di equazione $y = \sqrt{2x - 3}$.

1º passo: determiniamo il dominio.

Per l'esistenza del radicale poniamo $2x - 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq \dfrac{3}{2}$

Graficamente questo insieme corrisponde al semipiano destro rispetto alla retta di equazione $x = \dfrac{3}{2}$.

Cancelliamo la zona del piano che non contiene il grafico.

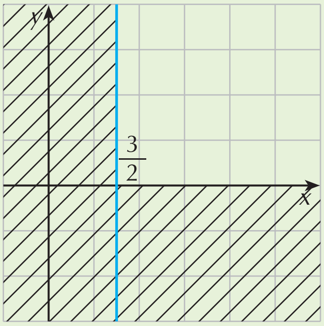


2º passo: concordanza di segno con il secondo membro.

Poichè il secondo membro è positivo o nullo, anche il primo deve avere le stesse caratteristiche; poniamo quindi:

$$y \geq 0$$

che corrisponde al semipiano delle ordinate positive (quello sopra l'asse x).



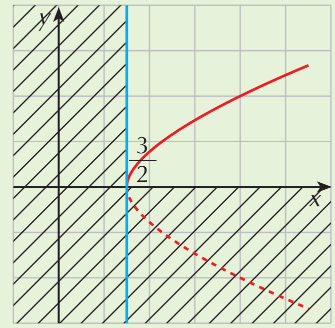
3º passo: eleviamo al quadrato.

Per i valori di x e y che soddisfano le considerazioni precedenti, eleviamo a quadrato entrambi i membri dell'equazione data:

$$y^2 = 2x - 3 \qquad \text{cioè} \qquad x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}$$

Questa è l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x, che ha vertice in $V\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e concavità rivolta verso destra; l'asse di simmetria coincide quindi con l'asse x.

L'equazione data è perciò equivalente al sistema $\begin{cases} x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$ e il grafico corrispondente è in figura.



PROVA TU

Traccia il grafico della curva di equazione $y = -\sqrt{x-2}$ seguendo le indicazioni.

1º passo: poni le condizioni di esistenza ....

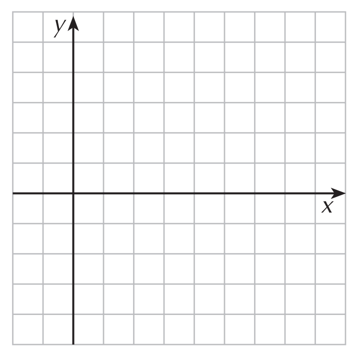
2º passo: poni la condizione di concordanza di segno ....

3º passo: eleva a quadrato e riconosci il tipo di conica ....

Se hai eseguito correttamente la procedura hai trovato che l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Completa adesso il grafico rappresentando la curva (la soluzione è al termine del recupero).



Arco di circonferenza

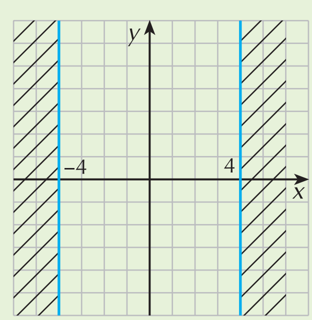
ESERCIZIO GUIDA

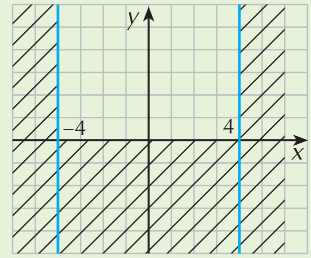
Tracciamo il grafico della curva di equazione $y = \sqrt{16 - x^2}$.

1º passo: determiniamo il dominio.

Per l'esistenza del radicale poniamo $16 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -4 \leq x \leq 4$

Graficamente questo insieme corrisponde alla striscia di piano delimitata dalle rette di equazione $x = -4$ e $x = 4$. Cancelliamo la zona del piano che non contiene il grafico.



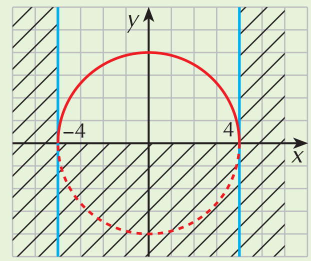


2º passo: concordanza di segno con il secondo membro.

Poichè il secondo membro è positivo o nullo, anche il primo deve avere le stesse caratteristiche; poniamo quindi:

$$y \geq 0$$

che corrisponde al semipiano delle ordinate positive.



3º passo: eleviamo al quadrato.

Per i valori di x e y che soddisfano le considerazioni precedenti, eleviamo a quadrato entrambi i membri dell'equazione data:

$$y^2 = 16 - x^2 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + y^2 = 16$$

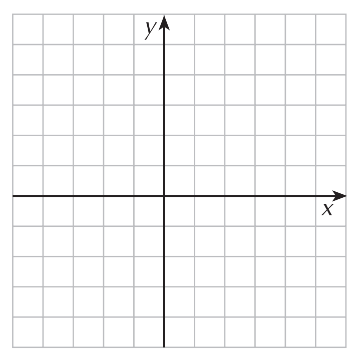
Questa è l'equazione di una circonferenza che ha centro nell'origine degli assi e raggio uguale a 4.

L'equazione data è perciò equivalente al sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y \geq 0 \end{cases}$ e il grafico corrispondente è in figura.

PROVA TU

Traccia il grafico della curva di equazione $y = \sqrt{9 - x^2} + 1$ seguendo le indicazioni.

1º passo: trasporta il termine 1 al primo membro in modo da isolare il radicale: $y - 1 = \sqrt{9 - x^2}$



2º passo: poni le condizioni di esistenza del radicale: ....
(è la striscia di piano delimitata dalle rette $x = -3$ e $x = 3$)

3º passo: poni le condizioni di concordanza di segno del primo membro con il secondo: ....
(è il semipiano al di sopra della retta $y = 1$)

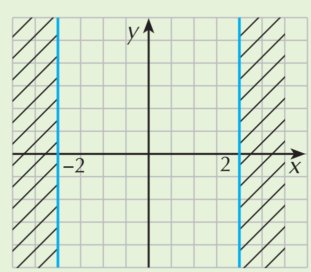
4º passo: eleva al quadrato e riordina i termini: ....
(è la circonferenza di centro $C(0, 1)$ e raggio $r = 3$)

Di tale circonferenza devi considerare solo la semicirconferenza superiore.

La soluzione è a fine recupero.

Arco di ellisse

ESERCIZIO GUIDA



Tracciamo il grafico della curva di equazione $y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

1º passo: determiniamo il dominio.

Per l'esistenza del radicale poniamo $4 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$

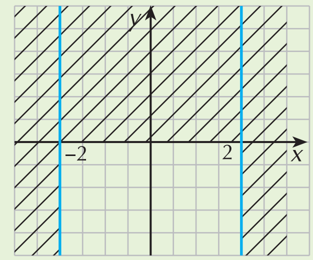
Graficamente questo insieme corrisponde alla striscia di piano delimitata dalle rette di equazione $x = -2$ e $x = 2$.

2º passo: concordanza di segno con il secondo membro.

Poichè il secondo membro è negativo o nullo, anche il primo deve avere le stesse caratteristiche; poniamo quindi:

$$y \leq 0$$

che corrisponde al semipiano delle ordinate negative.

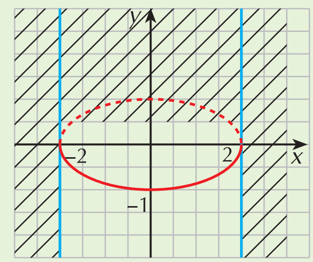


3º passo: eleviamo al quadrato e riordiniamo i termini

$$y^2 = \frac{1}{4}(4 - x^2) \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Nell'equazione ottenuta riconosciamo l'ellisse con i fuochi sull'asse x, di semiassi 2 e 1.

L'equazione data è perciò equivalente al sistema: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$ e corrisponde alla semiellisse inferiore.



PROVA TU

Traccia il grafico della curva di equazione $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ seguendo le indicazioni.

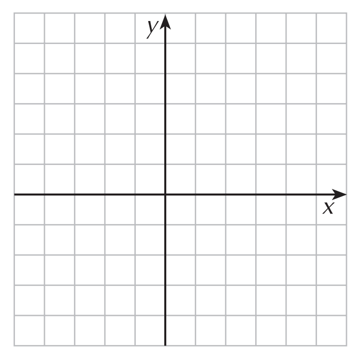
1º passo: poni le condizioni di esistenza del radicale: ....

2º passo: poni le condizioni di concordanza di segno del primo membro con il secondo: ....

3º passo: eleva al quadrato e riordina i termini: ....

Svolgendo correttamente i passaggi ottieni l'ellisse di equazione $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Completa adesso il grafico.



Arco di iperbole

ESERCIZIO GUIDA

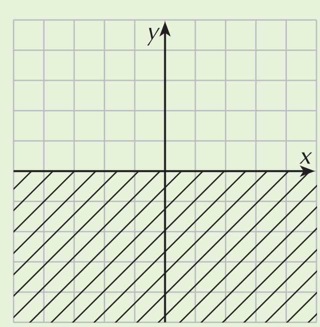
Tracciamo il grafico della curva di equazione $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x^2 + 4}$.

1º passo: determiniamo il dominio.

Per l'esistenza del radicale poniamo $x^2 + 4 \geq 0$ che è sempre verificata in R.

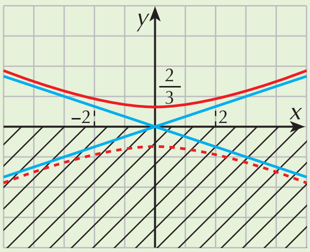
Non ci sono quindi limitazioni per la variabile x.

2º passo: concordanza di segno con il secondo membro: $y \geq 0$



3º passo: eleviamo al quadrato e riordiniamo i termini

$$y^2 = \frac{1}{9}(x^2+4) \qquad \to \qquad 9y^2 - x^2 = 4 \qquad \to \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = -1$$



Nell'equazione ottenuta riconosciamo l'iperbole con i fuochi sull'asse y, di semiasse reale uguale a $\frac{2}{3}$ e semiasse immaginario uguale a 2.

L'equazione data è perciò equivalente al sistema: $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ e corrisponde al ramo di iperbole che si trova al di sopra dell'asse x.

PROVA TU

Traccia il grafico della curva di equazione $y = -\sqrt{x^2+9}$ seguendo le indicazioni.

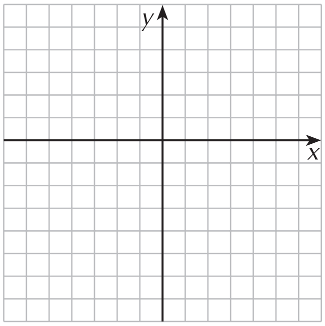
1º passo: dalle condizioni di esistenza del radicale risulta che il dominio è l'insieme: ....

2º passo: poni le condizioni di concordanza di segno del primo membro con il secondo: ....

3º passo: eleva al quadrato e riordina i termini: ....

Se hai svolto correttamente passaggi ottieni l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = -9$.

Completa adesso il grafico.



Fai gli esercizi

Costruisci il grafico delle seguenti funzioni irrazionali e controlla poi con GeoGebra o Wiris.

1 $y = 2 + \sqrt{x+4}$ $\qquad y = \sqrt{25 - x^2}$ $\qquad y = 3\sqrt{x+2}$

2 $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9} - x^2}$ $\qquad y = -\sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad y = -\sqrt{3x-1}$

3 $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ $\qquad y = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 25}$ $\qquad y = -\frac{1}{3}\sqrt{1 - 9x^2}$

4 $y = 2 - \sqrt{x}$ $\qquad y = \sqrt{4 - x^2} + 1$ $\qquad y = \sqrt{8 - 4x^2} - 2$

5 $y = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{16}{9} - x^2}$ $\qquad y = \sqrt{4x^2 - 1} + 1$ $\qquad y = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}$

Rivedi la teoria

La rappresentazione grafica di particolari curve: le curve con i moduli

Mediante lo studio delle coniche possiamo rappresentare facilmente anche il grafico di curve di secondo grado contenenti moduli:

- $y = |f(x)|$
  Il grafico di questa funzione si costruisce a partire da quello di $f(x)$ simmetrizzando le sue parti negative rispetto all'asse x (in pratica si ribaltano i rami negativi nel semipiano positivo delle ordinate)

- $y = |f(x)| + k \quad \text{con } k \in R$
  Dopo aver costruito il grafico di $|f(x)|$, si applica ad esso la traslazione di vettore $\vec{v}(0, k)$

- $y = |f(x)| + g(x)$
  Per costruire il grafico di questa funzione occorre analizzare il segno di $f(x)$ e considerare la funzione:
  $$y = \begin{cases} y = f(x) + g(x) & \text{per i valori di } x \text{ che rendono positiva o nulla } f(x) \\ y = -f(x) + g(x) & \text{per i valori di } x \text{ che rendono negativa } f(x) \end{cases}$$

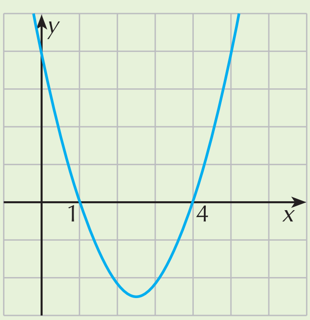
- Un procedimento analogo al precedente deve essere seguito nei casi in cui nell'equazione in forma implicita di una curva ci siano dei termini con il modulo.

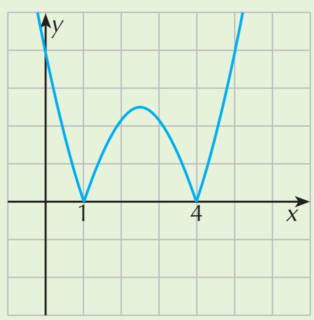
ESERCIZIO GUIDA

Costruiamo i grafici delle seguenti funzioni:

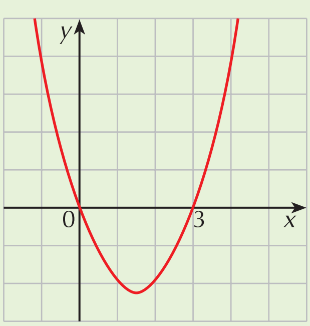
a. $y = |x^2 - 5x + 4|$ **b.** $y = |x^2 - 3x| + 1$ **c.** $y = \frac{1}{2}x^2 - |1 - x|$ **d.** $x^2 + y^2 - 4|x| - 4y + 3 = 0$

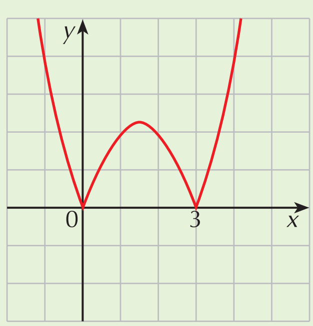
a. Disegniamo la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$.
Eseguiamo la simmetria rispetto all'asse x delle sue parti negative.

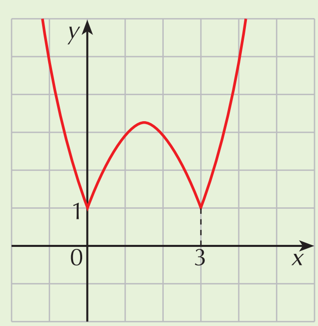




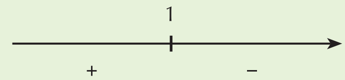
b. Disegniamo la parabola di equazione $y = x^2 - 3x$.
Per avere il grafico di $y = |x^2 - 3x|$ eseguiamo la simmetria rispetto all'asse x della parti negative.
Per il grafico finale eseguiamo una traslazione di vettore $\vec{v}(0, 1)$.





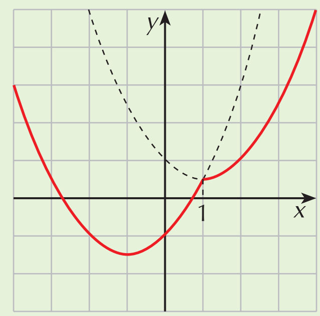


c. Studiamo il segno dell'argomento del modulo:



$1 - x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 1$

La funzione è quindi definita da: $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x - 1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & x > 1 \end{cases}$



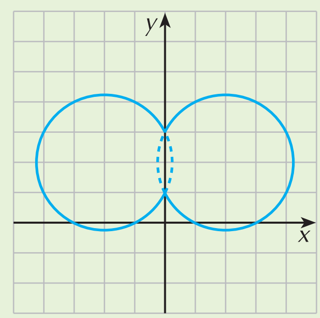
Dobbiamo quindi disegnare:

- la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ di vertice $V_1\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ a sinistra della retta $x = 1$
- la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ di vertice $V_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$ a destra.

d. L'equazione della curva deve essere scritta nel seguente modo:

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \qquad \text{se } x \geq 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0 \qquad \text{se } x < 0$



Si tratta in ogni caso di una circonferenza:

- la prima ha centro in $C_1(2, 2)$ e raggio $r_1 = \sqrt{5}$
- la seconda ha centro in $C_2(-2, 2)$ e raggio $r_2 = \sqrt{5}$.

Il grafico della curva (che non è una funzione) è formato dall'arco della prima circonferenza che si trova nel semipiano delle ascisse negative e dall'arco della seconda circonferenza che si trova nel semipiano delle ascisse positive.

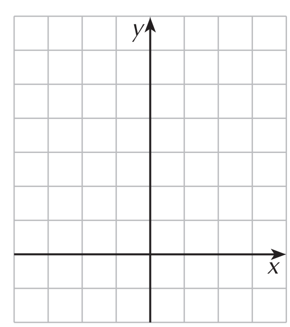
PROVA TU

Costruisci il grafico delle seguenti funzioni:

a. $y = |4 - x^2|$

Costruisci il grafico di $y = 4 - x^2$

Simmetrizza il ramo negativo della curva.



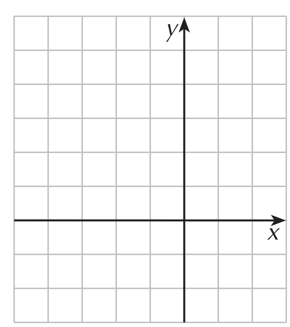
b. $y = 2x + |x^2 - 1|$

Studia il segno dell'argomento del modulo: $x^2 - 1 \geq 0$ se ....

Riscrivi l'equazione della funzione nei diversi intervalli:

$y = \begin{cases} 2x + x^2 - 1 & \text{se ....} \\ 2x - x^2 + 1 & \text{se ....} \end{cases}$

Costruisci adesso il grafico.



Fai gli esercizi

Costruisci il grafico delle curve che hanno le seguenti equazioni e controlla poi con GeoGebra o Wiris.

6 $y = |3x - 1|$ $\quad$ $y = |x^2 - x|$

7 $y = |2x^2 - x| + 2$ $\quad$ $y = |x^2 - 2x| - \dfrac{3}{4}$

8 $x^2 + y^2 - 3|x| + 3y - 8 = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 + |4x - 1| + 4y = 0$

9 $|y| = x^2$

(Suggerimento: la curva ha equazione: $\begin{cases} y = x^2 & \text{se } y \geq 0 \\ y = -x^2 & \text{se } y < 0 \end{cases}$)

10 $|y| = 2x - 1$ $\quad$ $|x| = y^2 - 2y + 1$

11 $x^2 + y^2 + |4x - 1| + 4y = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 + 2x - 4|y| + 1 = 0$

12 $y = |x - 2|x + 1$ $\quad$ $y = x^2 + |4x - 3| - 2$

Rivedi la teoria

La risoluzione grafica di equazioni

Risolvere graficamente l'equazione $f(x) = g(x)$ significa considerare il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ e trovare le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione $\quad |x^2 - 1| - x - 1 = 0$.

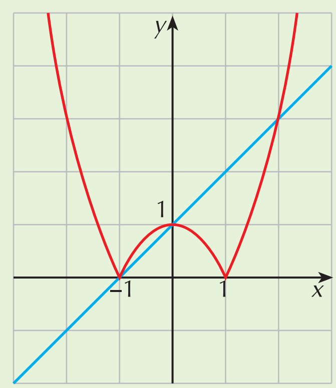
Per una più semplice rappresentazione grafica, riscriviamo dapprima l'equazione in modo da isolare la parte con il modulo:

$$|x^2 - 1| = x + 1$$

Costruiamo adesso nello stesso piano cartesiano il grafico delle due funzioni di equazioni:

$$y = |x^2 - 1| \qquad \text{e} \qquad y = x + 1$$

Dal grafico si deduce che le due funzioni si intersecano nei punti di ascissa -1 e 0. Si può eseguire una verifica algebrica mediante sostituzione.



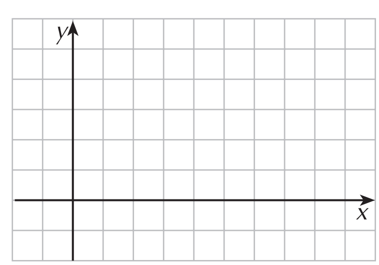
PROVA TU

Risolvi l'equazione $\sqrt{x - 3} = 3x - 11$ seguendo le indicazioni.

Costruisci i grafici delle curve di equazione:

$y = \sqrt{x - 3}$: $\quad$ è una .... situata nel semipiano ....

$y = 3x - 11$: $\quad$ è una retta.



Dal grafico si deduce che le due curve si intersecano nel punto di ascissa ..... che rappresenta la soluzione dell'equazione data. La verifica algebrica si esegue ancora mediante sostituzione.

Controlla il grafico al termine del recupero.

Fai gli esercizi

Risolvi graficamente le seguenti equazioni (controlla i grafici con GeoGebra o Wiris).

13 $x^2 + 3 = 4|x|$ $[-3,\ -1,\ 1,\ 3]$

14 $2x + 4 = |x^2 + 2x|$ $[-2,\ 2]$

15 $|x^2 + x| = x$ $[0]$

16 $\left|\dfrac{1}{x}\right| = x$ $[1]$

17 $2|x| = -x^2 - 1$ [impossibile]

18 $\sqrt{6x+1} = 2x - 3$ $[4]$

19 $\sqrt{4x^2-1} = 2x + 1$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

Rivedi la teoria

La risoluzione grafica di disequazioni

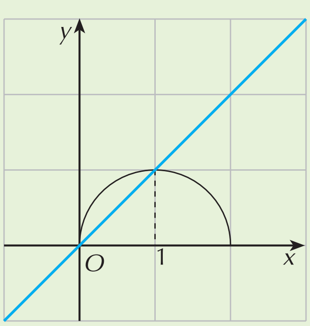
Per risolvere graficamente la disequazione $f(x) \gtreqless g(x)$ bisogna costruire i grafici delle funzioni di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e confrontarli.
La soluzione è rappresentata dall'insieme dei valori di x per i quali il grafico della funzione $f(x)$ assume valori maggiori (o minori, a seconda del verso della disequazione) del grafico della funzione $g(x)$ e ciò accade, da un punto di vista grafico, quando il grafico di $f(x)$ sta "sopra" (oppure "sotto") al grafico di $g(x)$.

ESERCIZIO GUIDA

a. Risolviamo la disequazione $\sqrt{2x - x^2} > x$.

Consideriamo le due funzioni:

- $y = \sqrt{2x - x^2}$ che corrisponde alla semicirconferenza di centro $C(1,\ 0)$ e raggio $r = 1$ situata nel semipiano delle ordinate positive
- $y = x$ che è la bisettrice del primo e terzo quadrante.



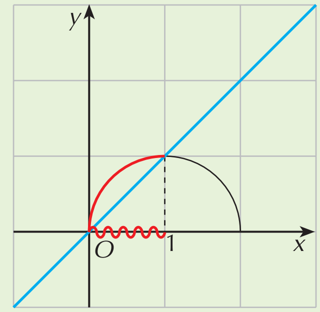
Dal grafico si rileva che le due curve si intersecano in $x = 0$ e $x = 1$.
Verifichiamo algebricamente sostituendo i due valori nell'equazione delle due funzioni:

per $x = 0$: $\sqrt{-0^2 + 2 \cdot 0} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$

per $x = 1$: $\sqrt{-1^2 + 2 \cdot 1} = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = 1$

Evidenziamo sul grafico la zona nella quale i punti della circonferenza hanno ordinata maggiore delle ordinate dei punti corrispondenti della retta.

La disequazione è quindi verificata se: $0 \leq x < 1$.

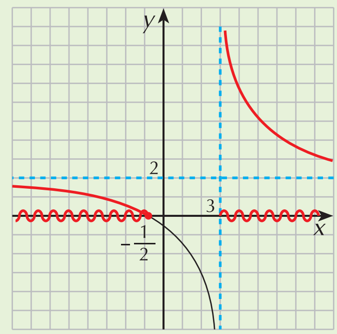


b. Risolviamo la disequazione $\dfrac{2x+1}{x-3} \geq 0$.

Il primo membro corrisponde alla funzione omografica di equazione $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ che ha centro $C(2, 3)$ e per asintoti le rette di equazioni $x = 3$ e $y = 2$; essa interseca l'asse x nel punto di ascissa $-\dfrac{1}{2}$ e l'asse y nel punto di ordinata $-\dfrac{1}{3}$.

Dal punto di vista grafico dobbiamo individuare la zona nella quale i punti della funzione omografica hanno ordinata positiva o nulla.

La disequazione è quindi verificata se: $x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x > 3$.



PROVA TU

Risolvi la disequazione $|x^2 - 2x| < x$ seguendo le indicazioni.

Costruisci i grafici delle funzioni:

- $y = |x^2 - 2x|$

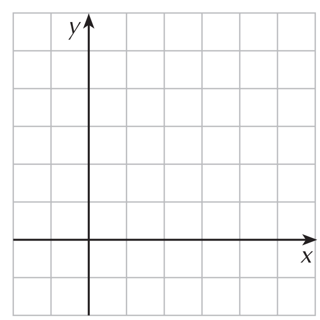
  costruisci la parabola $y = x^2 - 2x$ e poi ribalta le parti negative
- $y = x$

  è la bisettrice del primo e terzo quadrante

Le due curve si intersecano nel punto di ascissa .... (verificalo algebricamente)

La soluzione della disequazione è l'intervallo ....

Controlla la soluzione al termine del recupero.



Fai gli esercizi

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni.

20 $x < \sqrt{x}$ $[0 < x < 1]$

21 $|x + 2| > x^2$ $[-1 < x < 2]$

22 $\sqrt{x^2 + 3} < x + 3$ $[x > -1]$

23 $\sqrt{x + 2} \geq x$ $[-2 \leq x \leq 2]$

24 $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > 4$ $\left[\dfrac{3}{5} < x < 1 \vee 1 < x < \dfrac{5}{3}\right]$

25 $\sqrt{x^2+1} > x$ $[R]$

26 $\sqrt{x+1} \leq 1 - x$ $[-1 \leq x \leq 0]$

27 $|x^2+2x| > x^2$ $[-1 < x < 0 \ \vee \ x > 0]$

28 $\sqrt{2x+3} > \sqrt{6-x}$ $[1 < x \leq 6]$

Rivedi la teoria

Gli zeri di una funzione

Gli **zeri** di una funzione $f(x)$ sono le ascisse dei punti di intersezione della funzione stessa con l'asse x; essi si trovano quindi risolvendo l'equazione

$$f(x) = 0$$

Ricordiamo che un'equazione di grado n ammette al massimo n soluzioni in R e che:

- se n è dispari l'equazione ammette almeno una soluzione reale e, se ne ammette più di una, queste sono sempre in numero dispari
- se n è pari l'equazione ammette un numero pari di soluzioni reali oppure non ne ammette nemmeno una.

ESERCIZIO GUIDA

Troviamo gli zeri della funzione $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

Dobbiamo risolvere l'equazione $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

Applichiamo il teorema di Ruffini.

Le possibili soluzioni intere sono da ricercarsi tra i divisori del termine noto 2, cioè i numeri ± 1 e ± 2 :

- $P(1) = 2 + 1 - 5 + 2 = 0$. Una soluzione è $x = 1$.

Abbassiamo di grado l'equazione:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & & 2 & 3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado: $2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} -2 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Gli zeri della funzione sono i punti di ascissa: $1, -2, \dfrac{1}{2}$.

PROVA TU

Trova gli zeri delle funzioni:

a. $f(x) = x^2 - 2x$ **b.** $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ **c.** $f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 2x + 3$

Nel caso **b.** puoi scomporre il polinomio al secondo membro mediante raccoglimenti parziali e totali.
Nel caso **c.** applica il teorema di Ruffini.

$\left[\mathbf{a.}\ 0,\ 2;\ \mathbf{b.}\ \frac{1}{2};\ \mathbf{c.}\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 3\right]$

Rivedi la teoria

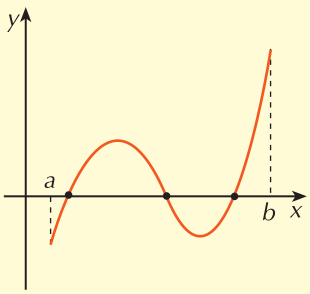
La risoluzione approssimata delle equazioni

Se un'equazione non può essere risolta con metodi algebrici, si deve ricorrere ad un metodo di approssimazione delle soluzioni che si serve del concetto di zero di una funzione.
A questo proposito ricordiamo il seguente teorema che costituisce un caso particolare del teorema degli zeri:

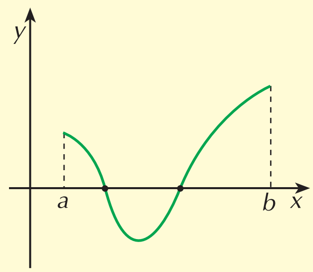
- Una funzione polinomiale $f(x)$ possiede *almeno* uno zero in un intervallo (a, b) se $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Osserviamo che il teorema:

- non garantisce l'unicità dello zero
- esprime una condizione sufficiente e non necessaria e quindi possono esistere degli zeri nell'intervallo (a, b) anche se in a e b la funzione assume valori dello stesso segno.



La funzione $f(x)$ ha tre zeri



La funzione ha due zeri anche se $f(a)$ e $f(b)$ sono concordi

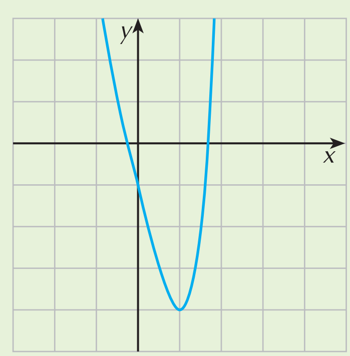
Una volta individuato un intervallo, il più piccolo possibile, che contiene uno zero della funzione, bisogna trovare un valore approssimato con un certo numero di cifre decimali esatte. Per fare ciò abbiamo visto due metodi:

- il metodo di bisezione
- il metodo delle sostituzioni successive.

Nell'esercizio che segue ricordiamo come applicarli.

ESERCIZIO GUIDA

Troviamo le soluzioni approssimate con dell'equazione $x^4 - 4x - 1 = 0$.



Consideriamo la funzione $f(x) = x^4 - 4x - 1$ e costruiamo il suo grafico con GeoGebra oppure Wiris.

La funzione ha due punti di intersezione con l'asse x, che appartengono rispettivamente agli intervalli $(-0,5; 0)$ e $(1; 2)$; infatti:

- intervallo $(-0,5; 0)$:
  $f(-0,5) = 1,0625$ $\quad f(0) = -1$ $\quad f(a)$ e $f(b)$ sono discordi
- intervallo $(1; 2)$:
  $f(1) = -4$ $\quad f(2) = 7$ $\quad f(a)$ e $f(b)$ sono discordi

Troviamo un valore approssimato della prima soluzione x_1 applicando il **metodo di bisezione.**

- punto medio: $\dfrac{-0,5 + 0}{2} = -0,25$ $\quad f(-0,25) = 0,004$ $\quad \rightarrow \quad x_1 \in (-0,25; 0)$

- punto medio: $\dfrac{-0{,}25+0}{2}=-0{,}125$ $\qquad f(-0{,}125)=-0{,}4998 \quad \rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}125)$
- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}125}{2}=-0{,}1875$ $\qquad f(-0{,}1875)=-0{,}249 \quad \rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}1875)$
- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}1875}{2}=-0{,}21875$ $\qquad f(-0{,}21875)=-0{,}123 \quad \rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}21875)$

Poiché la prima cifra decimale degli estremi dell'intervallo calcolato coincidono, possiamo già dire che un valore approssimato con una cifra decimale esatta della prima soluzione è $-0{,}2$. Proseguiamo nella ricerca e calcoliamo anche la seconda cifra decimale esatta.

- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}21875}{2}=-0{,}234375$ $\qquad f(-0{,}234375)=-0{,}059$

  $\rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}234375)$
- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}234375}{2}=-0{,}2421875$ $\qquad f(-0{,}2421875)=-0{,}028$

  $\rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}2421875)$
- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}2421875}{2}=-0{,}24609375$ $\qquad f(-0{,}24609375)=-0{,}012$

  $\rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}24609375)$
- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}24609375}{2}=-0{,}248046875$ $\qquad f(-0{,}248046875)=-0{,}004$

  $\rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}248046875)$
- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}248046875}{2}=-0{,}2490234375$ $\qquad f(-0{,}2490234375)=-0{,}00006$

  $\rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}25;-0{,}2490234375)$
- punto medio: $\dfrac{-0{,}25-0{,}2490234375}{2}=-0{,}2495117187$ $\qquad f(-0{,}2495117187)=0{,}002$

  $\rightarrow \quad x_1 \in (-0{,}2495117187;-0{,}2490234375)$

La soluzione appartiene all'ultimo intervallo trovato; in questo caso abbiamo trovato tre cifre decimali che coincidono e possiamo dire che una soluzione approssimata dell'equazione con tre cifre decimali esatte è $-0{,}249$.

Troviamo un valore approssimato della seconda soluzione x_2 applicando il **metodo delle sostituzioni successive.**
Troviamo la prima cifra decimale esatta sostituendo i valori compresi tra 1 e 2 con una cifra decimale fino a che ne troviamo due di segno opposto (per le sostituzioni puoi affidarti a Wiris):

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	-4	$-3{,}9359$	$-3{,}7264$	$-3{,}3439$	$-2{,}7584$	$-1{,}9375$	$-0{,}8464$	$0{,}5521$			

La soluzione è compresa tra 1,6 e 1,7, quindi un valore approssimato di x_2 con una cifra decimale esatta è 1,6.

Cerchiamo la seconda cifra decimale:

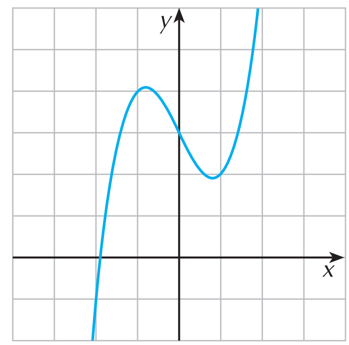
x	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,69	1,70
$f(x)$	−0,8464	−0,7210	−0,5925	−0,4609	−0,3261	−0,1880	−0,0467	0,0980			

La soluzione è compresa tra 1,66 e 1,67, quindi un valore approssimato di x_2 con due cifre decimali esatte è 1,66.

PROVA TU

Utilizzando il metodo delle sostituzioni successive, risolvi l'equazione $x^3 - 2x + 3 = 0$ determinandone le soluzioni con due cifre decimali esatte.

Considera la funzione $f(x) = x^3 - 2x + 3$ il cui grafico è in figura.



L'equazione ammette una soluzione reale che appartiene all'intervallo ....

Per trovarla con l'approssimazione richiesta:

- completa la tabella che segue per determinare la prima cifra decimale:

x											
$f(x)$											

- la soluzione appartiene all'intervallo ....
- completa la tabella per determinare la seconda cifra decimale:

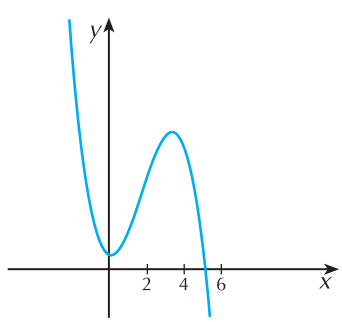
x											
$f(x)$											

La soluzione è .... [−1,89]

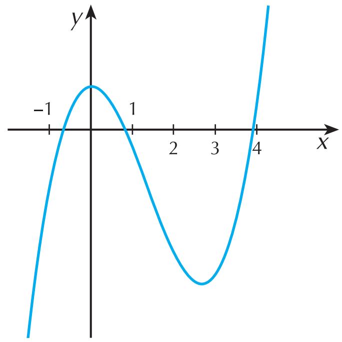
Fai gli esercizi

Utilizzando il metodo che ritieni più adatto, risolvi le seguenti equazioni determinando un valore approssimato delle soluzioni con due cifre decimali esatte (accanto ad ogni equazione è rappresentato il grafico della funzione ad essa associata).

29 $-x^3 + 5x^2 + 2 = 0$ [5,07]

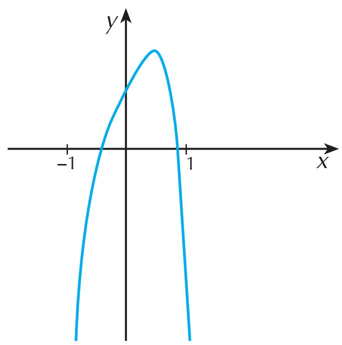


30 $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 1 = 0$



[−0,65; 0,78; 3,86]

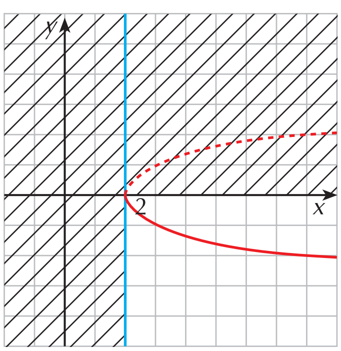
31 $-5x^4 + 2x + 1 = 0$



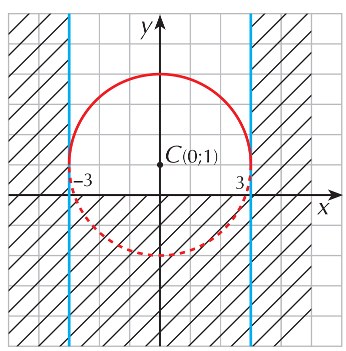
[−0,42; 0,85]

Soluzione degli esercizi "Prova tu"

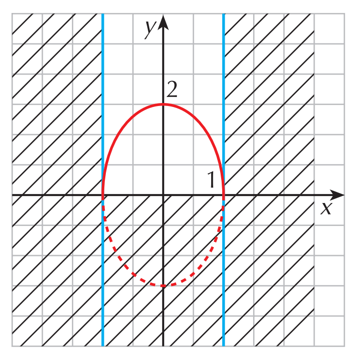
pag. 2



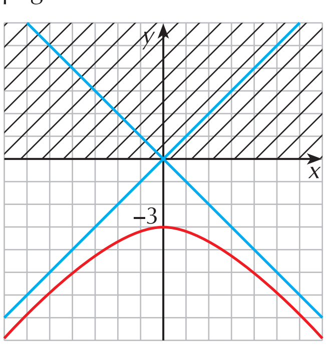
pag. 3



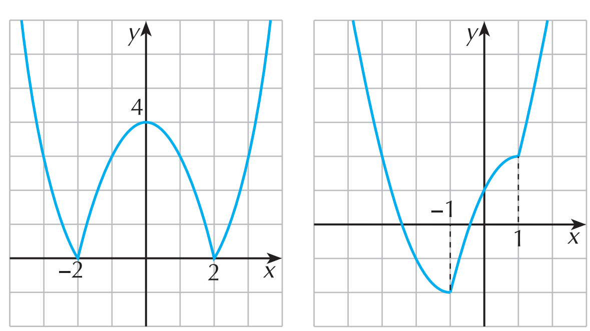
pag. 4



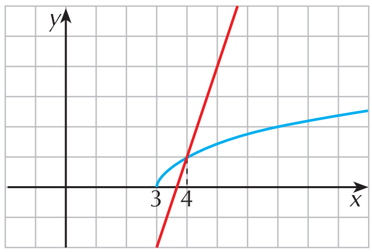
pag. 5



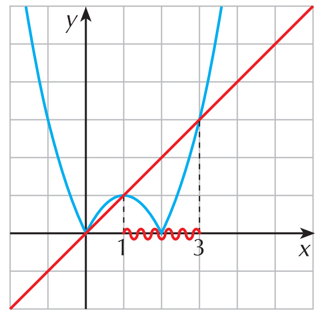
pag. 7



pag. 8



pag. 10



Verifica del recupero

1 Costruisci il grafico delle curve che hanno le seguenti equazioni:

a. $y = -\sqrt{x+2}$ **b.** $y = \left|\dfrac{x-1}{3x+2}\right|$ **c.** $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$ **d.** $y = 2 + \sqrt{x-x^2}$

20 punti

2 Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

a. $\sqrt{x^2-2} + 1 = x$ **b.** $|x^2 - 4x| = 12 - 3x$

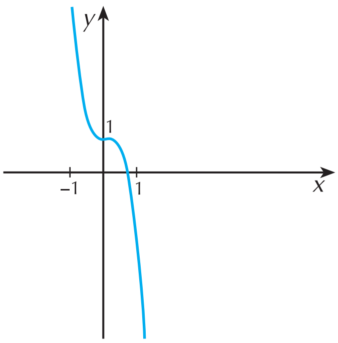
24 punti

3 Risolvi graficamente le seguenti disequazioni:

a. $x - 1 < \sqrt{x^2-1}$ **b.** $|x^2 + 4x| < x + 4$

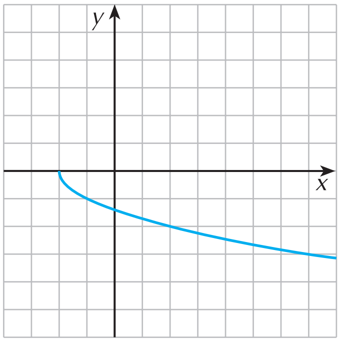
24 punti

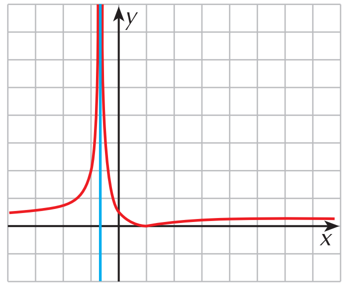
4 Utilizzando il metodo che preferisci approssima con due cifre decimali esatte gli zeri della funzione di equazione $f(x) = -4x^3 + x^2 + 1$ della quale è data la rappresentazione grafica.

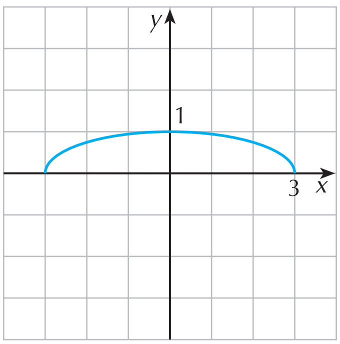


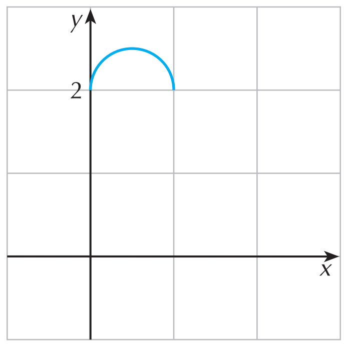
22 punti

Soluzioni

1 **a.** 

; **b.** 

c. 

; **d.** 

2 **a.** $\frac{3}{2}$; **b.** -3, 3, 4

3 **a.** $x \leq -1 \vee x > 1$; **b.** $-1 < x < 1$

4 0,72

Esercizio	1	2	3	4	
Punteggio					

Punteggio

Voto: $\frac{\text{punteggio}}{10} + 1 =$