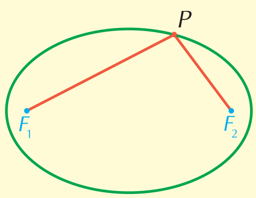
Attività di recupero

L'ELLISSE

Rivedi la teoria

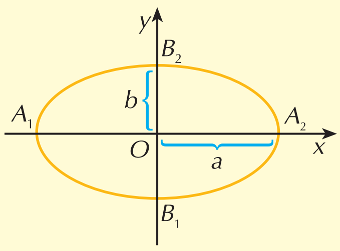
L'ellisse e la sua equazione

L'ellisse è il luogo dei punti P del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi.
Per scrivere la sua equazione conviene fissare il sistema di riferimento in modo che i fuochi appartengano all'asse x oppure all'asse y e l'origine stia nel punto medio del segmento F_1F_2.
In entrambi i casi l'equazione che si ottiene ha la forma



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dove supponiamo che sia $a^2 \neq b^2$ altrimenti si ottiene una circonferenza.
Si tratta di una curva simmetrica rispetto ad entrambi gli assi cartesiani e quindi rispetto all'origine.



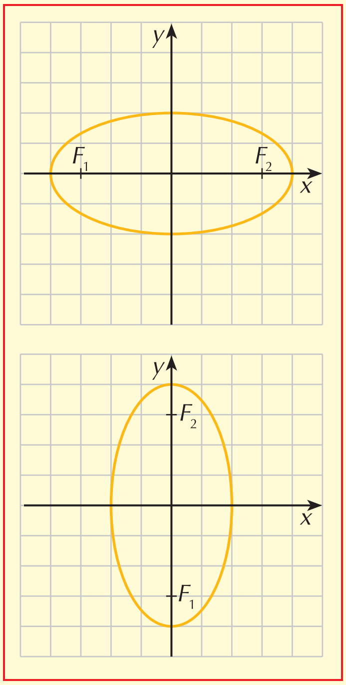
Un'ellisse interseca:

- l'asse x nei punti: $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$
- l'asse y nei punti: $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$

Questi punti si dicono **vertici** dell'ellisse; i segmenti OA_2 e OB_2 sono i suoi **semiassi**.

I fuochi appartengono:

- all'asse x se $a > b$;
  in questo caso $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ dove $c=\sqrt{a^2-b^2}$
- all'asse y se $a < b$;
  in questo caso $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ dove $c=\sqrt{b^2-a^2}$.



L'eccentricità di un'ellisse

L'eccentricità e di un'ellisse è definita come il rapporto fra la semidistanza focale c ed il semiasse maggiore:

$$e=\frac{c}{\text{semiasse maggiore}}$$

Essa rappresenta lo "schiacciamento" dell'ellisse sulla retta del semiasse maggiore ed è un numero reale compreso fra 0 e 1; se $e=0$ l'ellisse diventa una circonferenza, se $e=1$ l'ellisse degenera nel segmento individuato dai fuochi.

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo le caratteristiche delle ellissi che hanno le seguenti equazioni e costruiamone il grafico.

a. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$

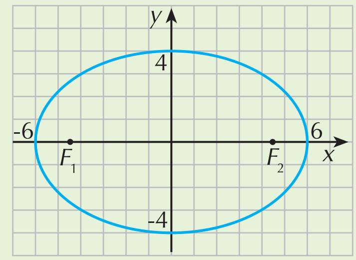
Abbiamo che: $a=6$ e $b=4$.

I vertici sono i punti di coordinate $(\pm 6,\ 0)$ e $(0,\ \pm 4)$

Essendo $a>b$ i fuochi appartengono all'asse x.

Poiché $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$, i fuochi hanno coordinate:

$$F_1\left(-2\sqrt{5},\ 0\right) \text{ e } F_2\left(2\sqrt{5},\ 0\right)$$



Calcoliamo l'eccentricità: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{6}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Il suo grafico è in figura.

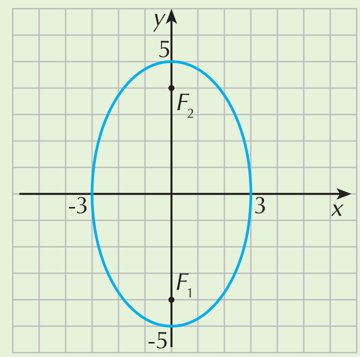
b. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

Poiché $a=3$ e $b=5$, l'ellisse ha i fuochi sull'asse y.

I vertici sono i punti: $A_1(-3,\ 0)$ e $A_2(3,\ 0)$ $B_1(0,\ -5)$ e $B_2(0,\ 5)$.

Essendo poi $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-9}=4$, i fuochi hanno coordinate:

$$F_1(0,\ -4) \text{ e } F_2(0,\ 4)$$



Calcoliamo l'eccentricità: $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{4}{5}$

Il suo grafico è in figura.

PROVA TU

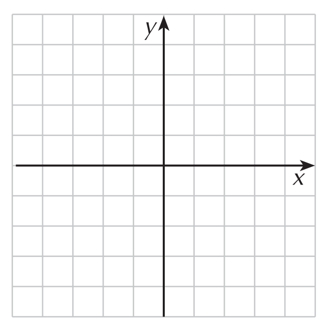
Individua le caratteristiche delle ellissi che hanno le seguenti equazioni.

a. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{3}=1$ dove $a=.....$ e $b=.....$

I vertici dell'ellisse sono i punti di coordinate:

(....., ...) e (....., ...) sull'asse x

(....., ...) e (....., ...) sull'asse y



I fuochi appartengono .... e hanno coordinate ....

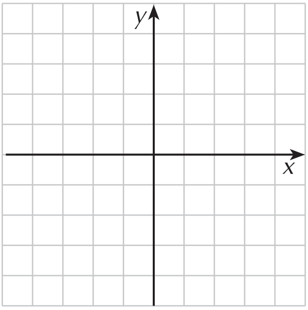
Costruisci il grafico nella figura a lato.

b. $9x^2+y^2=9$

Riscrivi prima di tutto l'equazione in forma canonica dividendo entrambi i membri per 9 :

$\dfrac{x^2}{.....}+\dfrac{y^2}{.....}=1$ quindi $a=.....$ e $b=.....$

I vertici sono i punti di coordinate ....
I fuochi appartengono .... e hanno coordinate ....
Costruisci il grafico nella figura a lato.



Fai gli esercizi

Individua le caratteristiche delle seguenti ellissi, trovane l'eccentricità e costruiscine poi il grafico.

1 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ $\left[A(\pm 3,\ 0);\ B(0,\pm 2);\ F\left(\pm\sqrt{5},\ 0\right);\ e=\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

2 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{25}=1$ $\left[A\left(\pm 2\sqrt{3},\ 0\right);\ B(0,\pm 5);\ F\left(0,\ \pm\sqrt{13}\right);\ e=\frac{\sqrt{13}}{5}\right]$

3 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{16}=1$ $\left[A\left(\pm\sqrt{5},\ 0\right);\ B(0,\pm 4);\ F\left(0,\ \pm\sqrt{11}\right);\ e=\frac{\sqrt{11}}{4}\right]$

4 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ $\left[A(\pm 2,\ 0);\ B\left(0,\pm\sqrt{3}\right);\ F(\pm 1,\ 0);\ e=\frac{1}{2}\right]$

5 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ $\left[A(\pm 10,\ 0);\ B(0,\pm 6);\ F(\pm 8,\ 0);\ e=\frac{4}{5}\right]$

6 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ $\left[A(\pm 5,\ 0);\ B(0,\pm 4);\ F(\pm 3,\ 0);\ e=\frac{3}{5}\right]$

7 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$ $\left[A(\pm 5,\ 0);\ B(0,\pm 13);\ F(0,\pm 12);\ e=\frac{12}{13}\right]$

8 Scrivi l'equazione dell'ellisse nei seguenti casi e costruiscine il grafico:

a. $a=2,\quad b=5$ $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1\right]$

b. $a=3,\quad c=5$ $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{34}=1\right]$

c. $b=1,\quad c=3$ $\left[\frac{x^2}{10}+y^2=1\right]$

Rivedi la teoria

Problemi sull'ellisse

L'equazione di un'ellisse dipende dai due parametri *a* e *b*; per individuare la sua equazione sono quindi necessarie e sufficienti due informazioni indipendenti.

I Problema: determinare l'equazione di un'ellisse sapendo che passa per due punti assegnati.
Come per le altre coniche, basta imporre la condizione di appartenenza dei punti alla curva.

ESERCIZIO GUIDA

a. Scriviamo l'equazione dell'ellisse sapendo che ha un vertice in $A(-4,\ 0)$ e l'altro in $B\left(0, \sqrt{5}\right)$.

La conoscenza del vertice appartenente all'asse x ci permette di dire che $a^2 = 16$.

La conoscenza di quello sull'asse y ci dice che $b^2 = 5$.

L'ellisse ha quindi equazione $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

b. Scriviamo l'equazione dell'ellisse che passa per punti $A\left(\sqrt{2}, -1\right)$ e $B(1,\ 2)$

Imponiamo il passaggio per il punto A: $\dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$

Imponiamo il passaggio per il punto B: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$

Scriviamo il sistema formato dalle due equazioni: $\begin{cases} \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1 \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$

Per risolvere in modo semplice il sistema, operiamo un cambio di variabile e poniamo $\dfrac{1}{a^2} = k$ e $\dfrac{1}{b^2} = h$; il sistema in questo modo diventa:

$$\begin{cases} 2k + h = 1 \\ k + 4h = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k = \dfrac{3}{7} \\ h = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Tornando nelle variabili a^2 e b^2 abbiamo: $\begin{cases} a^2 = \dfrac{7}{3} \\ b^2 = 7 \end{cases}$

L'ellisse ha quindi equazione: $\dfrac{x^2}{\frac{7}{3}} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ cioè $3x^2 + y^2 = 7$.

PROVA TU

Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha un vertice in $A\left(\sqrt{6},\ 0\right)$ e passa per $P\left(-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$.

La conoscenza del vertice A appartenente all'asse x ti permette di dire che $a^2 =$ ....

Sostituendo le coordinate del punto P nell'equazione generale dell'ellisse ottieni: ....

Risolvi adesso il sistema delle due equazioni trovate. $\left[\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{12} = 1\right]$

Rivedi la teoria

II Problema: determinare l'equazione di una ellisse conoscendo la sua eccentricità

In questo caso è noto il rapporto $\dfrac{c}{a}$ oppure $\dfrac{c}{b}$ ed essendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ oppure $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ a seconda della posizione dei fuochi, si può scrivere una prima equazione.
E' poi necessario avere una informazione aggiuntiva per risolvere il problema.

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x che ha eccentricità uguale a $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e un vertice nel punto $A\left(0, \sqrt{3}\right)$.

L'informazione sull'eccentricità ci permette di scrivere l'equazione: $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

che conviene scrivere nella sua forma equivalente: $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{6}{9}$

L'informazione sul vertice ci dice poi che: $b^2=3$

Risolviamo adesso il sistema (ricorda che devi trovare a^2 e b^2): $\begin{cases} \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{2}{3} \\ b^2=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=3 \end{cases}$

L'ellisse ha quindi equazione: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$

PROVA TU

Un'ellisse con i fuochi sull'asse y ha un vertice in $A\left(0, 3\sqrt{2}\right)$ ed eccentricità uguale a $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

L'informazione sul vertice si traduce nell'equazione: $b^2=.....$

Quella sull'eccentricità nell'equazione: $\frac{\sqrt{.....-.....}}{b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

cioè elevando al quadrato entrambi i membri: .... = ...

Risolvi adesso il sistema delle due equazioni. $\left[\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1\right]$

Fai gli esercizi

9 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha vertici nei punti $V_1(-2, 0)$ e $V_2\left(0, -\sqrt{3}\right)$. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\right]$

10 Scrivi l'equazione dell'ellisse che passa per i punti di coordinate $(2, 3)$ e $\left(\sqrt{\frac{22}{3}}, 2\right)$ e determina poi i vertici e le coordinate dei fuochi. $\left[\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1\right]$

11 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi di coordinate $F_1\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$ e $F_2\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ e passa per il punto $A(3, 1)$. $\left[\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1\right]$

12 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha fuochi di coordinate $(0, \pm 4)$ e semiasse maggiore uguale a 5. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right]$

13 Scrivi l'equazione dell'ellisse di eccentricità $\frac{\sqrt{5}}{5}$ che passa per il punto di coordinate $\left(2, \sqrt{15}\right)$. $\left[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1\right]$

14 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x che ha eccentricità uguale a $\frac{2}{3}$ e semiasse minore uguale a $\sqrt{5}$. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right]$

15 Scrivi l'equazione dell'ellisse che passa per i punti di coordinate $\left(1, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ e $(-3, 0)$ e determina poi la lunghezza della corda che la retta $y = 3x + 1$ individua su di essa. $\left[x^2 + 9y^2 = 9; \ \dfrac{27\sqrt{10}}{41}\right]$

16 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x che ha semiasse maggiore uguale a 5 e passa per $P\left(-3, \dfrac{12}{5}\right)$. $[9x^2 + 25y^2 = 225]$

Rivedi la teoria

Le rette tangenti a un'ellisse

Per determinare l'equazione della retta tangente ad un'ellisse si segue la stessa procedura vista per il caso della parabola:

- si mettono a sistema le equazioni dell'ellisse e della retta
- si calcola l'equazione risolvente
- si impone che il discriminante dell'equazione risolvente sia uguale a zero.

In particolare, se la retta tangente passa per un punto $P(x_0, y_0)$ appartenente all'ellisse, oltre al metodo illustrato, è possibile applicare le formule di sdoppiamento, ponendo nell'equazione dell'ellisse:

$x_0 x$ al posto di x^2

$y_0 y$ al posto di y^2

ESERCIZIO GUIDA

a. Data l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ troviamo le equazioni delle rette ad essa tangenti che sono perpendicolari alla retta r di equazione: $y = 2x - 1$.

Le rette tangenti all'ellisse, se devono essere perpendicolari a r, devono avere coefficiente angolare $-\dfrac{1}{2}$ ed hanno quindi equazione del tipo $y = -\dfrac{1}{2}x + q$.

Per determinare q scriviamo il sistema retta-ellisse: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + q \end{cases}$

troviamo l'equazione risolvente: $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + q \end{cases}$

$$4x^2 + 9\left(-\frac{1}{2}x + q\right)^2 = 36 \quad \to \quad 4x^2 + 9\left(-\frac{1}{2}x + q\right)^2 = 36 \quad \to \quad 25x^2 - 36qx + 36(q^2 - 4) = 0$$

Il discriminante di questa equazione è $\dfrac{\Delta}{4} = (18q)^2 - 25 \cdot 36(q^2 - 4) = 144(25 - 4q^2)$

e la condizione di tangenza è quindi $25 - 4q^2 = 0 \quad \to \quad q^2 = \dfrac{25}{4} \quad \to \quad q = \pm\dfrac{5}{2}$

Le rette tangenti sono due e hanno equazione $y = -\dfrac{1}{2}x \pm \dfrac{5}{2}$.

b. Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ vogliamo trovare l' equazione della retta ad essa tangente condotta dal suo punto Q di ascissa 1 e ordinata negativa.

Calcoliamo le coordinate del punto Q ponendo $x=1$ nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{y^2}{4}=1-\frac{1}{9} \qquad \frac{y^2}{4}=\frac{8}{9} \qquad y^2=\frac{32}{9} \qquad y=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \qquad \rightarrow \qquad Q\left(1,\ -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

Per trovare l'equazione della tangente applichiamo le formule di sdoppiamento ponendo:

$x_0x = 1 \cdot x = x$ al posto di x^2

$y_0y = -\frac{4\sqrt{2}}{3}y$ al posto di y^2

Sostituendo nell'equazione dell'ellisse e otteniamo: $\frac{x}{9}+\frac{-\frac{4\sqrt{2}}{3}y}{4}=1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x}{9}-\frac{\sqrt{2}}{3}y=1$

La retta tangente ha quindi equazione: $x-3y\sqrt{2}-9=0$.

c. Scriviamo l'equazione dell'ellisse tangente in $A\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ alla retta r di equazione $\frac{1}{2}x+\sqrt{3}y=1$.

Applichiamo le formule di sdoppiamento e sostituiamole nell'equazione canonica dell'ellisse per trovare l'equazione della tangente in A:

$$\frac{\frac{1}{2}x}{a^2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}y}{b^2}=1 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{1}{2a^2}x+\frac{\sqrt{3}}{4b^2}y=1$$

L'equazione $\frac{1}{2a^2}x+\frac{\sqrt{3}}{4b^2}y=1$ è identicamente uguale a $\frac{1}{2}x+\sqrt{3}y=1$ se:

$$\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\sqrt{3}}{4b^2}=\sqrt{3} \qquad \text{da cui ricaviamo che} \qquad a^2=1 \qquad b^2=\frac{1}{4}$$

L'ellisse ha quindi equazione: $x^2+4y^2=1$

PROVA TU

a. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(3, 0)$ che è tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{10}=1$.

Il punto P non appartiene all'ellisse (verificalo sostituendo le coordinate) ed è ad essa esterno; esistono quindi due rette tangenti e per trovarle devi applicare il metodo del sistema e imporre la condizione di tangenza:

- scrivi l'equazione della retta per P : $y - ..... = m(x - .....)$
- imposta il sistema retta-ellisse: $\begin{cases} 2x^2+y^2=10 \\ .... \end{cases}$
- trova l'equazione risolvente: ....
- imponi che il discriminante sia uguale a zero: ....

Trovi che $m=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

$\left[y=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}(x-3)\right]$

b. Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha un vertice in $A(4, 0)$ e che è tangente alla retta di equazione $x + 3y = 8$.

La conoscenza del vertice A indica che $a^2 = ...$

L'equazione dell'ellisse si può scrivere come $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Scrivi il sistema retta-ellisse e procedi come nel caso precedente.

Imponendo la condizione di tangenza trovi che $b^2 = \frac{16}{3}$.

Fai gli esercizi

17 Scrivi le equazioni delle rette passanti per il punto P assegnato e tangenti alla ellisse data.

a. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ $\quad P(0, 5)$ $\quad \left[y = \frac{\sqrt{21}}{4}x + 5,\ y = -\frac{\sqrt{21}}{4}x + 5\right]$

b. $x^2 + 9y^2 = 9$ $\quad P\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ $\quad [x + 6\sqrt{2}y = 9]$

18 Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ che passano per il punto $P(1, 4)$. $\left[y = -x + 5;\ y = \frac{11}{19}x + \frac{65}{19}\right]$

19 Scrivi l'equazione dell'ellisse che nel punto $P\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ è tangente alla retta di equazione $\sqrt{3}y + 2x - 4 = 0$. $[4x^2 + y^2 = 4]$

L'IPERBOLE

Rivedi la teoria

La definizione di iperbole

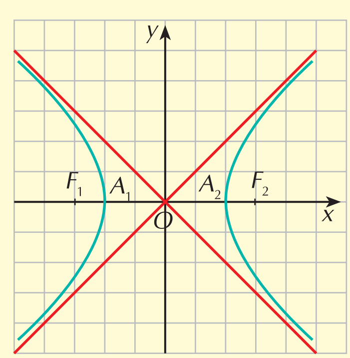
L'iperbole è il luogo dei punti P del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 chiamati *fuochi*.

L'iperbole con i fuochi sull'asse x

L'equazione di questa iperbole ha la forma $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Le sue caratteristiche sono le seguenti:

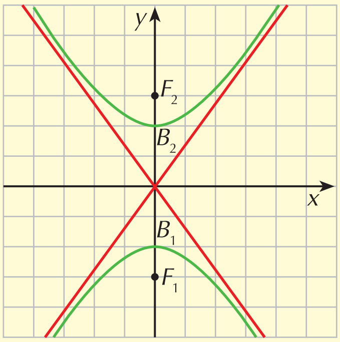
- è una curva simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine
- interseca l'asse x nei punti $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ chiamati **vertici reali**; il segmento A_1A_2 è l'**asse trasverso** e il segmento OA_1 (oppure OA_2) è il **semiasse trasverso**
- non esistono intersezioni con l'asse y; vengono tuttavia definiti due **vertici immaginari** di coordinate $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$, il segmento B_1B_2 è l'**asse non trasverso** ed il segmento OB_1 (oppure OB_2) è il **semiasse non trasverso**



- le rette $y = -\dfrac{b}{a}x$ e $y = \dfrac{b}{a}x$ sono i suoi asintoti
- i fuochi hanno coordinate $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ essendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

L'iperbole con i fuochi sull'asse *y*

L'equazione di questa iperbole ha la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$



Le sue caratteristiche sono le seguenti:

- è una curva simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine
- i suoi **vertici reali** appartengono all'asse y e hanno coordinate $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$; il segmento B_1B_2 è l'**asse trasverso** e il segmento OB_1 (oppure OB_2) è il **semiasse trasverso**
- non esistono intersezioni con l'asse x; i suoi **vertici immaginari** hanno coordinate $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, il segmento A_1A_2 è l'asse non trasverso ed il segmento OA_1 (oppure OA_2) è il **semiasse non trasverso**
- le rette $y = -\dfrac{b}{a}x$ e $y = \dfrac{b}{a}x$ sono i suoi asintoti
- i fuochi hanno coordinate $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ essendo ancora $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

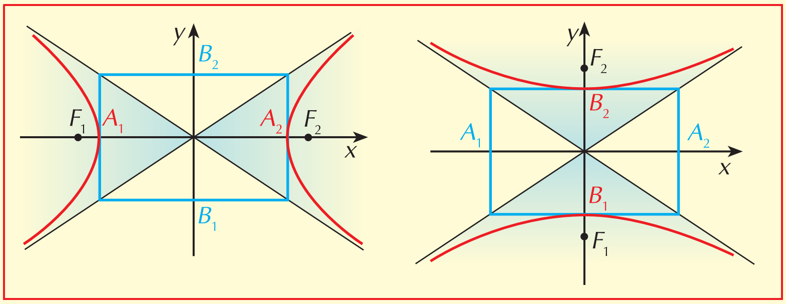
La costruzione del grafico

Per disegnare un'iperbole conviene seguire questa procedura:

- prendere i punti di coordinate $(\pm a, 0)$ sull'asse x e $(0, \pm b)$ sull'asse y
- disegnare il rettangolo che si ottiene tracciando da questi punti le parallele agli assi cartesiani
- tracciare gli asintoti che sono le diagonali di questo rettangolo

A questo punto:

- se l'iperbole ha i fuochi sull'asse x (l'equazione è $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$) il grafico è quello nella figura di sinistra
- se l'iperbole ha i fuochi sull'asse y (l'equazione è $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$) il grafico è quello nella figura di destra



L'eccentricità di un'iperbole

L'**eccentricità** e di un'iperbole è definita come il rapporto fra la semidistanza focale c ed il semiasse trasverso:

$$e = \frac{\text{semiasse focale}}{\text{semiasse trasverso}} = \begin{cases} \dfrac{c}{a} & \text{se i fuochi appartengono all'asse } x \\[2ex] \dfrac{c}{b} & \text{se i fuochi appartengono all'asse } y \end{cases}$$

Essa rappresenta l'ampiezza dell'iperbole ed è un numero reale maggiore di 1.

ESERCIZIO GUIDA

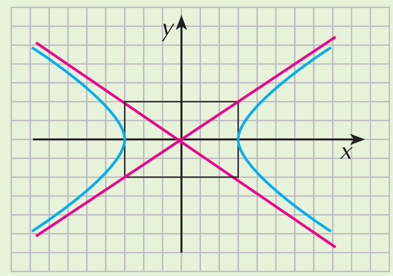
Studiamo le caratteristiche delle iperboli che hanno le seguenti equazioni e costruiamone il grafico.

a. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Possiamo dire subito che $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$ e, dalla forma dell'equazione, che i fuochi si trovano sull'asse x. Di conseguenza:

- il semiasse trasverso si trova sull'asse x e i vertici reali sono i punti di coordinate $(-3, 0)$ e $(3, 0)$
- il semiasse non trasverso si trova sull'asse y e i vertici immaginari sono i punti di coordinate $(0, -2)$ e $(0, 2)$
- essendo $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$ i fuochi hanno coordinate $\left(-\sqrt{13}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{13}, 0\right)$
- gli asintoti sono le rette di equazioni $y = \dfrac{2}{3}x$ e $y = -\dfrac{2}{3}x$ (le diagonali del rettangolo)
- l'eccentricità è: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Il grafico appartiene alla regione delimitata dagli asintoti che contiene l'asse x ed è in figura.



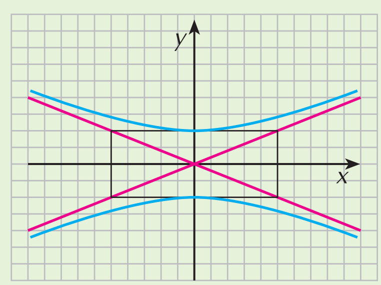
b. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = -1$

$a^2 = 25$ e $b^2 = 4$ e, dalla forma dell'equazione, che i fuochi si trovano sull'asse y.

Di conseguenza:

- il semiasse trasverso si trova sull'asse y e i vertici reali sono i punti di coordinate $(0, -2)$ e $(0, 2)$
- il semiasse non trasverso si trova sull'asse x e i vertici immaginari sono i punti di coordinate $(-5, 0)$ e $(5, 0)$
- essendo $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 4 = 29$ i fuochi hanno coordinate $\left(0, -\sqrt{29}\right)$ e $\left(0, \sqrt{29}\right)$
- gli asintoti sono le rette di equazioni $y = \dfrac{2}{5}x$ e $y = -\dfrac{2}{5}x$ (le diagonali del rettangolo)
- l'eccentricità è: $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

Il grafico appartiene alla regione delimitata dagli asintoti che contiene l'asse y ed è in figura.



PROVA TU

Individua le caratteristiche delle iperboli indicate e costruiscine il grafico.

a. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

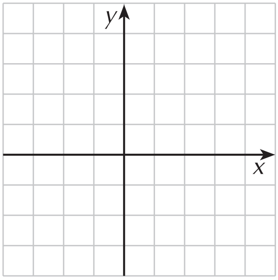
La forma dell'equazione indica che i fuochi appartengono ....

I vertici reali sono i punti: (....., ...) (....., ...)

I vertici immaginari sono i punti: (....., ...) (....., ...)

Gli asintoti hanno equazioni: $y = ...$ e $y = ...$

Costruisci il grafico nella figura a lato.



b. $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{5} = -1$

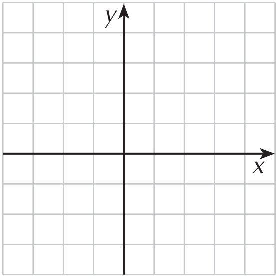
La forma dell'equazione indica che i fuochi appartengono ....

I vertici reali sono i punti: (....., ...) (....., ...)

I vertici immaginari sono i punti: (....., ...) (....., ...)

Gli asintoti hanno equazioni: $y = ...$ e $y = ...$

Costruisci il grafico nella figura a lato.



Fai gli esercizi

Delle seguenti iperboli individua le coordinate dei vertici e dei fuochi, le equazioni degli asintoti, l'eccentricità e costruiscine il grafico.

1 $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ $\left[V(\pm 2\sqrt{2}, 0);\ F(\pm\sqrt{17}, 0);\ y = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x;\ e = \dfrac{\sqrt{34}}{4}\right]$

2 $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{12} = -1$ $\left[V(0, \pm 2\sqrt{3});\ F(0, \pm\sqrt{15});\ y = \pm 2x;\ e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$

3 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{96} = 1$ $\left[V(\pm 2, 0);\ F(\pm 10, 0);\ y = \pm 2\sqrt{6}x;\ e = 5\right]$

4 $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{16} = -1$ $\left[V(0, \pm 4);\ F(0, \pm 2\sqrt{6});\ y = \pm\sqrt{2}x;\ e = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$

5 $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ $\left[V(\pm 8, 0);\ F(\pm 10, 0);\ y = \pm\dfrac{3}{4}x;\ e = \dfrac{5}{4}\right]$

6 Scrivi le equazioni delle iperboli riferite al centro e agli assi delle quali si sa che:

a. ha i fuochi sull'asse x $a = 2$ $b = 1$ $\left[\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1\right]$

b. ha i fuochi sull'asse y $c = 6$ $a = 4$ $\left[\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{16} = -1\right]$

c. ha i fuochi sull'asse x $b = 3$ $c = 5$ $\left[\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1\right]$

Rivedi la teoria

I Problema: determinare l'equazione dell'iperbole, con centro nell'origine degli assi, conoscendo le coordinate del fuoco F e di un suo punto P.

Per risolvere il problema imponiamo il passaggio per il punto P e usiamo la formula che esprime le coordinate del fuoco; risolviamo poi il sistema delle due equazioni ottenute.

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione dell'iperbole sapendo che ha fuoco in $F(5, 0)$ e che passa per il punto $P(8\sqrt{2}, 3\sqrt{7})$.

L'iperbole ha i fuochi sull'asse x, quindi la sua equazione è del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Essendo $c = 5$ possiamo scrivere la prima equazione del sistema: $a^2 + b^2 = c^2$ cioè $a^2 + b^2 = 25$

Imponiamo il passaggio per P: $\frac{(8\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{7})^2}{b^2} = 1$ cioè $\frac{128}{a^2} - \frac{63}{b^2} = 1$

Risolviamo adesso il sistema: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ \frac{128}{a^2} - \frac{63}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ 128b^2 - 63a^2 = a^2b^2 \end{cases}$

Ricaviamo a^2 dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda; procediamo poi alla risoluzione dell'equazione ottenuta ricordando che dobbiamo calcolare b^2 e che quindi l'equazione è di secondo grado in tale incognita:

$$\begin{cases} a^2 = 25 - b^2 \\ 128b^2 - 63(25 - b^2) = (25 - b^2)b^2 \end{cases} \rightarrow b^4 + 166b^2 - 1\,575 = 0 \rightarrow b^2 = \begin{cases} -175 \\ 9 \end{cases}$$

Scartando la soluzione negativa che non è accettabile troviamo che $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases}$ e quindi l'iperbole ha equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

PROVA TU

Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha un fuoco in $F(0, \sqrt{14})$ e passa per il punto $P(\sqrt{5}, 3\sqrt{2})$.

L'equazione dell'ellisse ha la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Imponi che l'ordinata del fuoco sia uguale a $\sqrt{14}$: ..... + ... = ...

Imponi il passaggio per P: $\frac{.....}{a^2} - \frac{.....}{b^2} = -1$

Risolvi il sistema delle equazioni ottenute e ricava a^2 e b^2. $\left[\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = -1\right]$

Rivedi la teoria

II Problema: determinare l'equazione dell'iperbole che passa per due punti assegnati

Se il problema non dà informazione sulla posizione dei fuochi, dobbiamo considerare sia il caso dell'iperbole con l'asse focale coincidente con quello delle ascisse che quello dell'iperbole con l'asse focale coincidente con quello delle ordinate.
Il problema inoltre è determinato se i punti dati non sono simmetrici rispetto agli assi cartesiani o all'origine perchè in questo caso la conoscenza delle loro coordinate equivale ad una sola condizione.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione dell'iperbole che passa per $P(6, 2)$ e $Q\left(2\sqrt{10}, \sqrt{5}\right)$.

I caso: iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Scriviamo il sistema ottenuto imponendo il passaggio per P e Q : $\begin{cases} \dfrac{36}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = 1 \\ \dfrac{40}{a^2} - \dfrac{5}{b^2} = 1 \end{cases}$

Operando le sostituzioni $\dfrac{1}{a^2} = k$ e $\dfrac{1}{b^2} = h$ risolviamo il sistema più semplice: $\begin{cases} 36k - 4h = 1 \\ 40k - 5h = 1 \end{cases}$

Otteniamo: $\begin{cases} k = \dfrac{1}{20} \\ h = \dfrac{1}{5} \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a^2 = 20 \\ b^2 = 5 \end{cases}$

L'equazione dell'iperbole è quindi $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

II caso: iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

Scriviamo il sistema ottenuto imponendo il passaggio per P e Q : $\begin{cases} \dfrac{36}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = -1 \\ \dfrac{40}{a^2} - \dfrac{5}{b^2} = -1 \end{cases}$

Operando le stesse sostituzioni otteniamo: $\begin{cases} 36k - 4h = -1 \\ 40k - 5h = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{20} \\ h = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = -20 \\ b^2 = -5 \end{cases}$

Avendo trovato valori negativi per a^2 e b^2, il sistema non ha soluzioni. Non esiste quindi un'iperbole che passa per P e Q che ha i fuochi sull'asse y.

Osserviamo che i valori trovati per a^2 e b^2, a meno del segno, sono gli stessi; è quindi sufficiente risolvere uno solo dei due casi e adattare poi le soluzioni.

PROVA TU

Scrivi l'equazione dell'iperbole che passa per i punti $P\left(2, -\sqrt{15}\right)$ e $Q\left(\sqrt{6}, 3\sqrt{2}\right)$.

Considera dapprima l'equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

- imponi il passaggio per P : .... $= 1$

- imponi il passaggio per Q : .... $= 1$

Risolvendo il sistema delle due equazioni ottenute trovi che $a^2 = -6$ e $b^2 = -9$.

Avendo trovato valori negativi, la tipologia di equazione scelta non è quella giusta; tuttavia sai che risolvendo l'analogo sistema che si ottiene utilizzando l'altra tipologia di equazione i valori di a^2 e b^2 sono gli stessi con segno positivo.

L'equazione dell'iperbole è quindi ....

Rivedi la teoria

III Problema: determinare l'equazione dell'iperbole note le equazioni degli asintoti e le coordinate di un suo punto

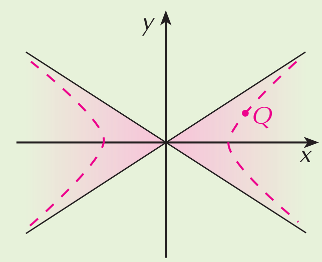
Disegnati gli asintoti nel piano cartesiano, il tipo di iperbole da considerare dipende dalla posizione del punto Q.

In ogni caso le due equazioni che permettono di trovare a^2 e b^2 si ottengono:

- imponendo il passaggio per il punto
- imponendo che $\frac{b}{a}$ sia uguale al coefficiente angolare positivo dell'asintoto

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione dell'iperbole che passa per $Q(8, \sqrt{3})$ e ha per asintoti le rette di equazione $y = \pm\frac{1}{4}x$.



La rappresentazione nel piano cartesiano ci suggerisce che l'iperbole ha i fuochi sull'asse x; la sua equazione è quindi del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Imponiamo il passaggio per Q: $\frac{64}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$

Uguagliamo i coefficienti angolari degli asintoti: $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} \frac{64}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} 64b^2 - 3a^2 = a^2b^2 \\ a = 4b \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a^2 = 16b^2 \\ 16b^4 - 16b^2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a^2 = 16b^2 \\ 16b^2(b^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione in b^2 troviamo che $b^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

La sola soluzione accettabile è $\begin{cases} b^2 = 1 \\ a^2 = 16 \end{cases}$

L'iperbole ha quindi equazione $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$.

PROVA TU

Trova l'equazione dell'iperbole che ha per asintoti le rette di equazioni $y = \pm\frac{2}{3}x$ e passa per $P\left(-4, -\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Disegna i due asintoti e individua la posizione del punto P (anche approssimata).

puoi concludere che l'iperbole ha i fuochi ....

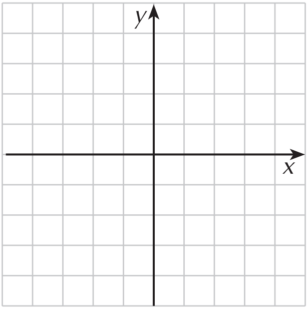
e che quindi la sua equazione è della forma ....

Imponi il passaggio per P : .... = ...

Uguaglia il coefficiente angolare generale degli asintoti a quello dato:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{2}{3}$$

Risolvi il sistema. $\left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\right]$



Fai gli esercizi

7 Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha un fuoco in $F\left(0,\ -2\sqrt{5}\right)$ e passa per $P\left(2\sqrt{3},\ 8\right)$. $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1\right]$

8 Scrivi l'equazione dell'iperbole che passa per $P\left(\sqrt{5},\ 2\right)$ e $Q\left(2,\ \sqrt{3}\right)$. $[x^2 - y^2 = 1]$

9 Scrivi l'equazione dell'iperbole che passa per $Q\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ e ha per asintoti le rette di equazione $y = \pm\ \frac{2}{5}x$. $\left[\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = -1\right]$

10 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x sapendo che il semiasse trasverso è lungo 1 e che passa per $A(2,\ 1)$. $[x^2 - 3y^2 = 1]$

11 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y di eccentricità $\frac{5}{4}$ che ha per asintoti le rette $y = \pm\frac{4}{3}x$. $\left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1\right]$

12 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente i fuochi sull'asse x che ha per asintoti le rette di equazioni $y = \pm\frac{4}{3}x$ e che passa per il punto $P(3,\ 2)$. $[9x^2 - 16y^2 = 17]$

13 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente per fuochi i punti di coordinate $\left(0,\ \pm\sqrt{15}\right)$ e passante per $A\left(2,\ \sqrt{7}\right)$. $\left[\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{5} = -1\right]$

14 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente i fuochi sull'asse x sapendo che il semiasse trasverso è lungo 2 e che ha eccentricità $\frac{7}{4}$. $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{33} = 1\right]$

Rivedi la teoria

Determinare l'equazione della retta tangente ad un'iperbole

Per trovare l'equazione della **retta tangente** ad un'iperbole si deve:

- scrivere l'equazione generale della retta
- impostare il sistema fra l'equazione dell'iperbole e l'equazione della retta
- trovare l'equazione risolvente del sistema
- calcolare il discriminante di questa equazione e imporre che sia uguale a zero.

In particolare, se la retta tangente passa per un punto $P(x_0, y_0)$ che appartiene all'iperbole, oltre al metodo illustrato si possono usare le formule di sdoppiamento ponendo nell'equazione dell'iperbole:

$x_0 x$ al posto di x^2

$y_0 y$ al posto di y^2

ESERCIZIO GUIDA

a. Scriviamo le equazioni delle tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$ condotte dal punto $P(1, 0)$.

Il punto P non appartiene all'iperbole.

Scriviamo allora l'equazione della generica retta passante per P: $\quad y - 0 = m(x - 1)$

Scriviamo ora il sistema formato dalle equazioni dell'iperbole e del fascio: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = m(x-1) \end{cases}$

Troviamo l'equazione risolvente: $\begin{cases} x^2 - m^2(x-1)^2 = 4 \\ y = m(x-1) \end{cases} \quad \rightarrow \quad x^2 - m^2(x-1)^2 = 4$

Sviluppiamo il calcolo e scriviamola nella forma tipica di un'equazione di secondo grado:

$$x^2(1 - m^2) + 2m^2 x - (m^2 + 4) = 0$$

Imponiamo la condizione di tangenza: $\dfrac{\Delta}{4} = m^4 + (1 - m^2)(m^2 + 4) \quad \rightarrow \quad m^4 + (1 - m^2)(m^2 + 4) = 0$

Risolviamo l'equazione: $\quad -3m^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Le equazioni delle rette tangenti si ottengono sostituendo a m i valori trovati nell'equazione del fascio:

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 1) \qquad y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

b. Scriviamo le equazioni delle tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$ condotte dal suo punto P di ascissa 4 e ordinata positiva.

Il punto P appartiene all'iperbole; troviamo la sua ordinata:

$$16 - y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y^2 = 12 \quad \rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{3}$$

Il punto ha coordinate $\left(4, 2\sqrt{3}\right)$.

Per trovare l'equazione della tangente possiamo applicare le formule di sdoppiamento ponendo:

$x_0 x = 4x$ al posto di x^2

$y_0 y = 2\sqrt{3}y$ al posto di y^2

Sostituiamo nell'equazione dell'iperbole e otteniamo $\quad 4x - 2\sqrt{3}y = 4$.

c. Scriviamo l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x che passa per $P\left(3, -\sqrt{15}\right)$ ed è tangente alla retta $2x + y + 2 = 0$.

La forma dell'equazione è: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Imponiamo il passaggio per P: $\quad \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{15}{b^2} = 1$

Scriviamo il sistema retta-iperbole e troviamo l'equazione risolvente:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = -2x - 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{(-2x-2)^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad (b^2 - 4a^2)x^2 - 8a^2x - a^2b^2 - 4a^2 = 0$$

Imponiamo la condizione di tangenza (usiamo $\frac{\Delta}{4}$): $16a^4 - (b^2 - 4a^2)(-a^2b^2 - 4a^2) = 0$

Risolviamo adesso rispetto ad a^2 e b^2 il sistema nelle due equazioni ottenute:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{15}{b^2} = 1 \\ 16a^4 - (b^2 - 4a^2)(-a^2b^2 - 4a^2) = 0 \end{cases}$$

Troviamo due soluzioni: $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 12 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a^2 = \dfrac{9}{4} \\ b^2 = 5 \end{cases}$

Otteniamo così le due iperboli di equazioni: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1 \quad \vee \quad \dfrac{4x^2}{9} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

PROVA TU

a. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ condotte dal punto $P(1, 0)$.

Scrivi l'equazione della retta per P : $y - ..... = m(x - .....)$

Imposta il sistema retta-iperbole: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = ... \end{cases}$

Trova l'equazione risolvente: ....

Imponi la condizione di tangenza: ....

Risolvendo l'equazione trovi che $m = \pm\sqrt{3}$; le due rette hanno quindi equazione $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ e $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

b. Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha un vertice reale in $A\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ ed è tangente alla retta $4x - 5y + 1 = 0$.

Il vertice reale appartiene all'asse y, l'iperbole ha quindi i fuochi su tale asse e la sua equazione è della forma ....

Dall'informazione sul vertice ricavi subito che è: $b^2 = ...$

Per utilizzare l'informazione sulla retta tangente scrivi il sistema retta-iperbole dove al posto di b^2 conviene mettere il valore appena trovato: $\begin{cases} 4x - 5y + 1 = 0 \\ .... \end{cases}$

Trova l'equazione risolvente: ....

Imponi che sia $\Delta = 0$: ....

L'equazione dell'iperbole è quindi $4x^2 - 5y^2 = -1$.

Fai gli esercizi

15 Scrivi le equazioni delle rette passanti per il punto P assegnato e tangenti all'iperbole data.

a. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ $\quad P(0, 2)$ $\quad \left[y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x + 2\right]$

b. $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ $\quad P(5, 2)$ $\quad [x - y - 3 = 0]$

16 Scrivi l'equazione dell'iperbole che è tangente alla retta $y = 4x - 3$ nel suo punto di ascissa 1. $[4x^2 - y^2 = 3]$

17 Dopo aver scritto l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x che passa per i punti di coordinate $(-3, 2)$ e $\left(2\sqrt{3}, 4\right)$, trova le equazioni delle rette ad essa tangenti condotte dal punto $P(1, 0)$; determina poi le coordinate dei punti A e B di tangenza e la lunghezza della corda che li ha per estremi.

$$\left[\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1;\ y = \pm\frac{4\sqrt{14}}{7}(x-1);\ A\left(8, -4\sqrt{14}\right);\ B\left(8, 4\sqrt{14}\right);\ \overline{AB} = 8\sqrt{14}\right]$$

18 Trova le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ che siano perpendicolari alla retta di equazione $x + 2y = 0$. $\left[y = 2x \pm 5\sqrt{3}\right]$

19 Data l'iperbole di equazione $4x^2 - \frac{y^2}{2} = -1$, scrivi le equazioni delle rette ad essa tangenti e parallele a $y = 2x$. $[y = 2x \pm 1]$

Rivedi la teoria

L'iperbole equilatera

Un'iperbole si dice equilatera se ha i semiassi uguali, cioè se $a = b$.
La sua equazione **riferita al centro e agli assi** assume in questo caso la forma:

- $\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}$ se i fuochi sono sull'asse x; in questo caso:
  - i vertici hanno coordinate $(\pm a, 0)$
  - i fuochi hanno coordinate $\left(\pm a\sqrt{2}, 0\right)$
- $\boldsymbol{x^2 - y^2 = -a^2}$ se i fuochi sono sull'asse y; in questo caso:
  - i vertici hanno coordinate $(0, \pm a)$
  - i fuochi hanno coordinate $\left(0, \pm a\sqrt{2}\right)$

In entrambi i casi gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti e l'eccentricità è $\sqrt{2}$.

Si parla poi di iperbole equilatera **riferita agli asintoti** quando gli asintoti sono gli assi cartesiani. In tal caso l'equazione assume la forma $\boldsymbol{xy = h}$.
In particolare:

- se $h > 0$ i vertici e i fuochi sono sulla bisettrice del primo e terzo quadrante ed hanno coordinate $V\left(\pm\sqrt{h}, \pm\sqrt{h}\right)$, $F\left(\pm\sqrt{2h}, \pm\sqrt{2h}\right)$
- se $h < 0$ i vertici e i fuochi sono sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante ed hanno coordinate $V\left(\pm\sqrt{-h}, \mp\sqrt{-h}\right)$, $F\left(\pm\sqrt{-2h}, \mp\sqrt{-2h}\right)$

L'equazione $xy = h$ rappresenta anche la relazione di proporzionalità inversa tra le variabili x e y.

ESERCIZIO GUIDA

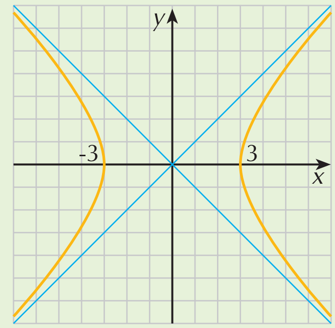
Individuiamo le caratteristiche delle seguenti iperboli equilatere.

a. $x^2 - y^2 = 9$

È un'iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani con i fuochi sull'asse x di coordinate $F_1\left(-3\sqrt{2},\ 0\right)$ e $F_2\left(3\sqrt{2},\ 0\right)$.

I vertici hanno coordinate $(-3,\ 0)$ e $(3,\ 0)$

Gli asintoti hanno equazione $y = \pm x$ e l'eccentricità è $e = \sqrt{2}$.

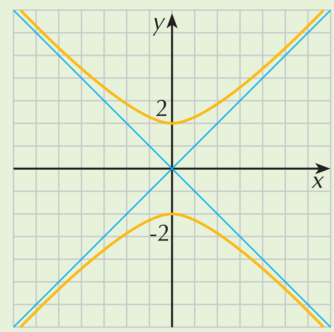


b. $x^2 - y^2 = -4$

È un'iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani con i fuochi sull'asse y di coordinate $F_1\left(0,\ -2\sqrt{2}\right)$ e $F_2\left(0,\ 2\sqrt{2}\right)$

I vertici hanno coordinate $(0,\ -2)$ e $(0,\ 2)$

Gli asintoti hanno equazione $y = \pm x$ e l'eccentricità è $e = \sqrt{2}$.



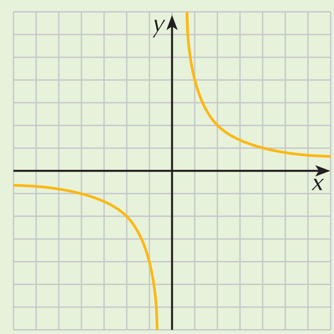
c. $xy = 4$

È un'iperbole equilatera riferita agli asintoti appartenente al primo e terzo quadrante.

I fuochi hanno coordinate $F_1\left(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}\right)$ e $F_2\ \left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

I vertici hanno coordinate $(-2,\ -2)$ e $(2,\ 2)$

Gli asintoti coincidono con gli assi cartesiani e l'eccentricità è $e = \sqrt{2}$.



PROVA TU

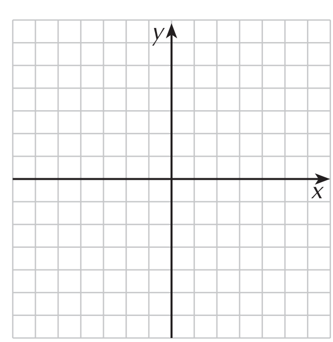
a. Individua le caratteristiche dell'iperbole $x^2 - y^2 = -8$ e costruiscine il grafico.

Si tratta di un'iperbole equilatera .... con i fuochi ....

I suoi vertici sono i punti di coordinate (....., ...) e (....., ...)

Gli asintoti sono le rette di equazioni .... e ....

Utilizzando il diagramma a lato costruisci il grafico.



b. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che passa per il punto $P(2,\ -3)$.

L'equazione dell'iperbole è del tipo ....

Imponendo il passaggio per P ottieni ....

L'iperbole ha dunque equazione $xy = -6$.

Fai gli esercizi

20 Individua le caratteristiche delle seguenti iperboli equilatere e tracciane il grafico:

a. $x^2 - y^2 = 16$ **b.** $x^2 - y^2 = -8$ **c.** $xy = 6$

21 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera che abbia i seguenti requisiti:

a. sia riferita al centro e agli assi e passi per il punto $A(2, 3)$ [$x^2 - y^2 = -5$]

b. sia riferita al centro e agli assi e abbia fuochi nei punti di coordinate $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ [$x^2 - y^2 = 4$]

c. sia riferita al centro e agli asintoti e passi per $P(-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$. [$xy = -6$]

Rivedi la teoria

La funzione omografica

Applicando all'iperbole equilatera $xy = k$ una traslazione di vettore $\vec{v}$ assegnato, supposto $c \neq 0 \ \wedge \ ad - bc \neq 0$, si ottiene un'equazione della forma

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

che prende il nome di **funzione omografica**.

I suoi asintoti sono rette parallele agli assi cartesiani ed hanno equazioni $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$.

La curva è simmetrica rispetto al punto di intersezione degli asintoti che è il punto di coordinate $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

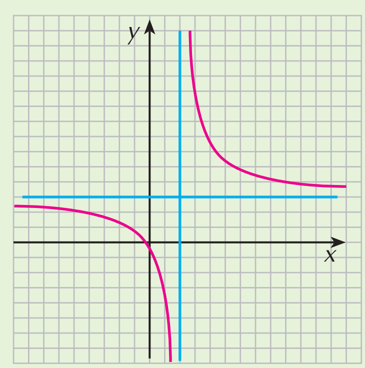
ESERCIZIO GUIDA

a. Studiamo la funzione omografica di equazione $y = \frac{3x + 1}{x - 2}$.

Abbiamo che: $a = 3$ $b = 1$ $c = 1$ $d = -2$

La funzione ha quindi:

- asintoto verticale di equazione $x = -\frac{d}{c}$ cioè $x = 2$
- asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{a}{c}$ cioè $y = 3$
- centro nel punto di coordinate $(2, 3)$.



Per costruire il suo grafico con maggior precisione possiamo determinare le coordinate di qualche punto appartenente alla curva.

Interseca l'asse y in $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Interseca l'asse x in $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

Altri punti si individuano con la seguente tabella:

ramo di sinistra

x	1	-2
y	-4	$\frac{5}{4}$

ramo di destra

x	3	5	7
y	10	$\frac{16}{3}$	$\frac{22}{5}$

b. Vogliamo determinare la funzione omografica che ha centro in $C(3,\ 3)$ che passa per il punto $Q(1,\ -1)$.

L'equazione richiesta è del tipo: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Osserviamo che essa dipende da quattro parametri; tuttavia, come vedremo nell'esercizio, per determinarla sono sufficienti tre informazioni indipendenti.

Poichè le generiche coordinate del centro sono $C\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$, uguagliandole a quelle date, otteniamo le due equazioni:

$$-\frac{d}{c} = 3 \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{c} = 3$$

Imponendo il passaggio per Q abbiamo: $-1 = \dfrac{a+b}{c+d}$

Scriviamo il sistema formato dalle tre condizioni: $\begin{cases} -\dfrac{d}{c} = 3 \\ \dfrac{a}{c} = 3 \\ -1 = \dfrac{a+b}{c+d} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 3c \\ b = -c \\ d = -3c \end{cases}$

Sostituiamo nell'equazione generale della funzione omografica: $y = \dfrac{3cx - c}{cx - 3c}$

Raccogliendo il termine c al numeratore e al denominatore e semplificando troviamo infine che la funzione omografica ha equazione:

$$y = \frac{3x-1}{x-3}$$

PROVA TU

a. Dopo averne messo in evidenza le caratteristiche, costruisci il grafico della funzione $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

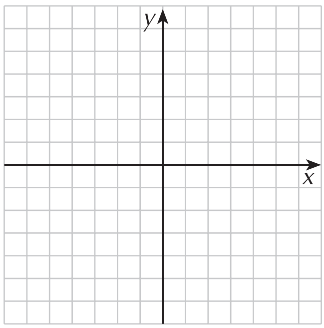
Si tratta della funzione omografica (iperbole equilatera traslata).

I suoi asintoti sono le rette di equazione: $x = ...$ $\qquad y = ...$

Il centro di simmetria è il punto di coordinate: $(.....,\ .....)$

Trova le coordinate di qualche punto e costruisci il grafico.

x			
y			



b. Scrivi l'equazione della funzione omografica che ha per asintoti le rette $y = \dfrac{3}{4}$ e $x = \dfrac{1}{2}$ sapendo che passa per il punto di coordinate $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Le informazioni sugli asintoti ti danno le prime due equazioni: $-\dfrac{d}{c} = ...$ $\qquad$ e $\qquad \dfrac{a}{c} = ...$

Imponi poi il passaggio per il punto dato e risolvi il sistema.

La funzione ha equazione $y = \dfrac{3x-4}{4x-2}$.

Fai gli esercizi

22 Studia le caratteristiche delle seguenti funzioni omografiche e disegnane il grafico:

a. $y = \dfrac{4x+1}{3x-6}$ $\left[C\left(2,\ \frac{4}{3}\right),\ x = 2,\ y = \frac{4}{3}\right]$

b. $y = \dfrac{2x}{4x-1}$ $\left[C\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right),\ x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{2}\right]$

c. $y = \dfrac{3}{2x+5}$ $\left[C\left(-\frac{5}{2},\ 0\right),\ x = -\frac{5}{2},\ y = 0\right]$

23 Determina la funzione omografica che ha centro in $C(3,\ 2)$ che passa per il punto $Q\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$.

$\left[y = \frac{2x}{x-3}\right]$

24 Determina la funzione omografica che ha centro in $C\left(-\frac{1}{5},\ \frac{1}{2}\right)$ che passa per il punto $Q\left(-2,\ \frac{17}{18}\right)$.

$\left[y = \frac{5x-7}{10x+2}\right]$

25 Determina la funzione omografica che ha per asintoti le rette di equazione $y = \frac{2}{3}$ e $x = -\frac{1}{3}$ e passa per il punto $Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{4}{5}\right)$.

$\left[y = \frac{2x+1}{3x+1}\right]$

Verifica del recupero

1 Riconosci il tipo di curva definita dalle seguenti equazioni, individuane le caratteristiche principali e tracciane il grafico:

a. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ **b.** $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ **c.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = -1$

d. $x^2 + \dfrac{y^2}{64} = 1$ **e.** $4x^2 - 4y^2 = 9$ **f.** $y = \dfrac{3x-2}{4x-6}$

18 punti

2 Scrivi l'equazione dell'ellisse che:

a. ha eccentricità $\dfrac{1}{3}$ e un fuoco nel punto di coordinate $(-2, 0)$

b. passa per $P\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ e $Q\left(-\dfrac{1}{3}, 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

14 punti

3 Calcola l'eccentricità delle seguenti ellissi:

a. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **b.** $9x^2 + 5y^2 = 45$

6 punti

4 Data l'ellisse di equazione $9x^2 + 25y^2 = 225$, scrivi le equazioni delle rette ad essa tangenti che sono parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

9 punti

5 Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita al centro e agli assi che ha:

a. un fuoco di coordinate $(2\sqrt{13}, 0)$ e per asintoti le rette di equazioni $y = \pm\dfrac{3}{2}x$

b. vertice reale nel punto di coordinate $(0, 2)$ ed eccentricità uguale a $\dfrac{5}{2}$.

14 punti

6 Trova la lunghezza della corda intercettata dalla retta di equazione $y = \dfrac{2}{3}x - 1$ sull'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 8$.

9 punti

7 Scrivi le equazioni delle tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 16$ nei punti di intersezione con la retta di equazione $x = 5$.

12 punti

8 Scrivi l'equazione della funzione omografica passante per l'origine degli assi e avente centro in $C(-1, 1)$.

8 punti

Soluzioni

1 **a.** iperbole: $V(\pm 2, 0)$, $F\left(\pm 2\sqrt{17}, 0\right)$, asintoti $y = \pm 4x$

b. ellisse: $F(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{2}$

c. iperbole: $V(0, \pm 6)$, $F(0, \pm 3\sqrt{5})$, asintoti $y = \pm 2x$

d. ellisse: $F(0, \pm\sqrt{63})$, $a = 1$, $b = 8$

e. iperbole equilatera: $V\left(\pm\frac{3}{2}, 0\right)$, $F\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right)$; asintoti $y = \pm x$; $e = \sqrt{2}$

f. funzione omografica: asintoti $y = \frac{3}{4}$, $x = \frac{3}{2}$

2 **a.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$; **b.** $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$

3 **a.** $\frac{4}{5}$; **b.** $\frac{2}{3}$

4 $y = x \pm \sqrt{34}$

5 **a.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$; **b.** $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = -1$

6 $\frac{14}{5}\sqrt{13}$

7 $5x \pm 3y = 16$

8 $y = \frac{x}{x+1}$

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	
Punteggio									

Punteggio

Voto: $\frac{\text{punteggio}}{10} + 1 =$