Attività di recupero

LA CIRCONFERENZA

Rivedi la teoria

L'equazione della circonferenza e le sue caratteristiche

La circonferenza è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto fisso chiamato *centro*; la distanza si chiama *raggio*.
L'equazione canonica della circonferenza è:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} \qquad \text{con } a, b, c \in R$$

Essa è quindi un'equazione che:

- è di secondo grado in x e y
- contiene sempre i termini x^2e y^2 con coefficiente uguale a 1
- non possiede il termine misto di secondo grado xy.

Il centro della circonferenza è il punto C di coordinate $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$.

Il raggio si determina con l'espressione $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$.

Affinché la circonferenza sia reale occorre quindi che sia $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$.

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se le seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze e, in caso affermativo, determiniamone centro e raggio.

a. $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 1 = 0$

Abbiamo che $a = 4$, $b = -3$, $c = 1$.

Calcoliamo l'espressione $a^2 + b^2 - 4c$: $16 + 9 - 4 = 21$

Avendo trovato un valore positivo, l'equazione rappresenta una circonferenza; troviamo centro e raggio:

$-\frac{a}{2} = -2 \qquad -\frac{b}{2} = \frac{3}{2} \qquad$ quindi $\qquad C\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{21}$

b. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 8 = 0$

Abbiamo che $a = -4$, $b = 2$, $c = 8$.

Calcoliamo l'espressione $a^2 + b^2 - 4c$: $16 + 4 - 32 = -12$

Avendo trovato un valore negativo, l'equazione non rappresenta una circonferenza.

c. $2x^2 + 2y^2 - 6x + y = 0$

Riscriviamo l'equazione in forma canonica dividendo entrambi i membri per 2: $x^2 + y^2 - 3x + \frac{1}{2}y = 0$

Abbiamo che $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

Calcoliamo l'espressione $a^2 + b^2 - 4c$: $\quad 9 + \frac{1}{4} - 0 = \frac{37}{4}$

Avendo trovato un valore positivo, l'equazione rappresenta una circonferenza; troviamo centro e raggio:

$-\frac{a}{2} = \frac{3}{2} \qquad -\frac{b}{2} = -\frac{1}{4} \qquad$ quindi $\qquad C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{37}$

PROVA TU

a. $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 3 = 0$

Calcola $a^2 + b^2 - 4c$: .... Si tratta di una circonferenza? SI NO

Se hai risposto SI trova il centro e il raggio: $C(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$ $r = \ldots\ldots$

Ripeti la stessa procedura per le seguenti equazioni:

b. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6 = 0$

c. $x^2 + y^2 + x - y - 4 = 0$

d. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 9y - 2 = 0$ [**a.** si, **b.** no, **c.** si, **d.** si]

Fai gli esercizi

1 Stabilisci se le seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze e, in caso affermativo, trova il centro e il raggio:

a. $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$ $\left[C\left(\frac{3}{2}, -1\right); r = \frac{1}{2}\sqrt{29}\right]$

b. $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$ $\left[C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); r = \frac{1}{2}\sqrt{10}\right]$

c. $x^2 + y^2 + 8 = 3x - y$ [non è una circonferenza]

d. $x^2 + y^2 - 3x + y + 8 = 0$ [non è una circonferenza]

e. $3x^2 + 3y^2 = 6y + 1$ $\left[C(0, 1); r = \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

2 Dopo aver controllato che si tratta di circonferenze reali, trovane il centro e il raggio e poi rappresentale nel piano cartesiano:

a. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ $[C(2, 0); r = 3]$

b. $x^2 + y^2 + 1 = 3x - y$ $\left[C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right); r = \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

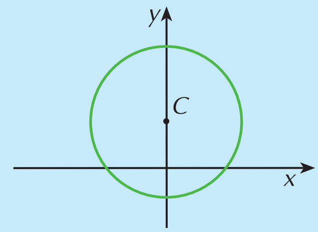
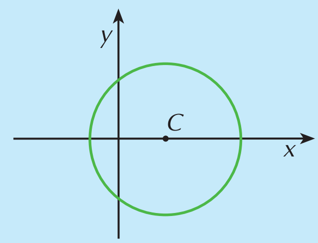
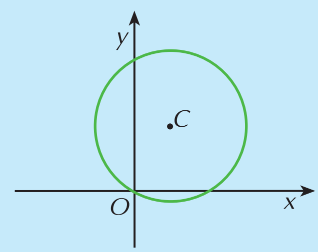
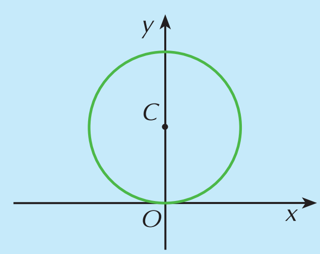
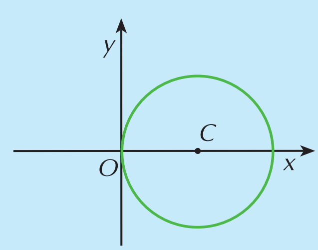
c. $2x^2 + 2y^2 + x - 4y + 1 = 0$ $\left[C\left(-\frac{1}{4}, 1\right); r = \frac{3}{4}\right]$

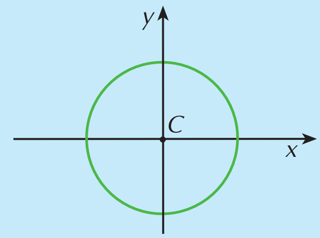
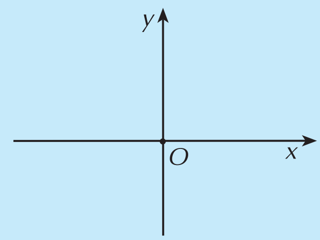
d. $2x^2 + 2y^2 + 6x - 2y + 3 = 0$ $\left[C\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right); r = 1\right]$

Rivedi la teoria

I casi particolari

In corrispondenza di particolari valori dei coefficienti a, b e c, si evidenziano posizioni particolari della circonferenza nel piano cartesiano.
Una loro classificazione è riportata nella seguente tabella:

CONDIZIONI	EQUAZIONE	CARATTERISTICHE	GRAFICO
1. $\boldsymbol{a = 0}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 + by + c = 0}$	**C** (centro) **si trova sull'asse y** perché $x_C = -\frac{a}{2} = 0$	
2. $\boldsymbol{b = 0}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + c = 0}$	**C** (centro) **si trova sull'asse x** perché $y_C = -\frac{b}{2} = 0$	
3. $\boldsymbol{c = 0}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by = 0}$	**la circonferenza passa per l'origine O** perché sostituendo la coppia (0, 0) al posto di x e y l'equazione diventa un'identità	
4. $\boldsymbol{a = c = 0}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 + by = 0}$	**C si trova sull'asse y e la circonferenza passa per O** perché valgono contemporaneamente le condizioni 1 e 3 $r = y_C$	
5. $\boldsymbol{b = c = 0}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax = 0}$	**C si trova sull'asse x e la circonferenza passa per O** perché valgono contemporaneamente le condizioni 2 e 3 $r = x_C$	

CONDIZIONI	EQUAZIONE	CARATTERISTICHE	GRAFICO
6. $\boldsymbol{a = b = 0}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 + c = 0}$	***C* coincide con *O*** perché $x_C = -\frac{a}{2} = 0$ e $y_C = -\frac{b}{2} = 0$	
7. $\boldsymbol{a = b = c = 0}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 0}$	**la circonferenza si riduce ad un punto, l'origine**	

ESERCIZIO GUIDA

a. Studiamo le caratteristiche delle circonferenze che hanno le seguenti equazioni.

- $x^2 + y^2 - 4x + y = 0$

  Manca il termine noto, cioè $c = 0$; l'equazione rappresenta quindi una circonferenza che passa per l'origine degli assi.

  Il suo centro è il punto $C\left(2, -\frac{1}{2}\right)$.

  Il raggio è $r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 1 - 4 \cdot 0} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

- $x^2 + y^2 + 6y - 2 = 0$

  L'equazione rappresenta una circonferenza in quanto $a^2 + b^2 - 4c = 36 + 8 = 44$ ed è $44 > 0$

  Poiché manca il termine in x, cioè $a = 0$, la circonferenza ha centro che appartiene all'asse y ed è:

  $C(0, -3) \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{44} = \sqrt{11}$

- $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$

  L'equazione rappresenta una circonferenza in quanto $a^2 + b^2 - 4c = 1 + 8 = 9$ ed è $9 > 0$

  Poiché manca il termine in y, cioè $b = 0$, la circonferenza ha centro che appartiene all'asse x ed è:

  $C\left(\frac{1}{2}, 0\right) \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{9} = \frac{3}{2}$

- $x^2 + y^2 - 8 = 0$

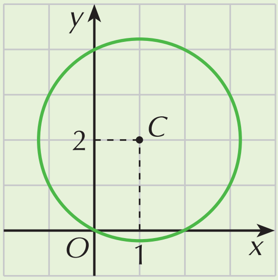
  Poiché mancano i termini in x e in y, cioè $a = b = 0$, ed inoltre $c < 0$, l'equazione rappresenta un circonferenza che ha centro nell'origine e raggio $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b. Deduciamo dal grafico il valore dei parametri a, b e c dell'equazione della circonferenza.

Poiché il centro ha coordinate $(1, 2)$, si ha che: $a = -2$ $\quad b = -4$

Inoltre la circonferenza passa per l'origine e quindi $c = 0$.

L'equazione è quindi $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$



PROVA TU

a. Individua le caratteritiche delle circonferenze rappresentate dalle seguenti equazioni:

$x^2 + y^2 + 2x = 0$ $\quad a = ...$ $\quad b = ...$ $\quad c = ...$

La circonferenza ha quindi centro .... e passa per ....; il raggio è uguale a ....

$x^2 + y^2 - 3y + 1 = 0$ $\quad a = ...$ $\quad b = ...$ $\quad c = ...$

La circonferenza ha centro .... e raggio uguale a ....

b. Scrivi l'equazione di una circonferenza che risponda alle seguenti caratteristiche:

- passa per l'origine:
  deve essere $c = 0$, un possibile esempio è quindi $x^2 + y^2 + x - y = 0$
  trovane tu un altro: ....
- ha centro nell'origine: ....
- ha centro sull'asse x: ....
- ha centro sull'asse y e passa per l'origine: ....

Fai gli esercizi

Disegna nel piano cartesiano esempi di circonferenze la cui equazione soddisfi le seguenti condizioni e scrivine una possibile equazione.

3 $a = b = 0$ [circonferenze con centro nell'origine e scrivine una possibile equazione]

4 $c = 0,\ a < 0,\ b < 0$ [circonferenze passanti per l'origine e centro nel 1° quadrante]

5 $a < 0,\ b > 0$ [circonferenze con centro nel 4° quadrante]

6 $a = c = 0$ [circonferenze passanti per l'origine e con centro sull'asse y]

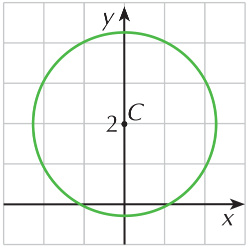
7 $a < 0,\ b < 0$ [circonferenze con centro nel 1° quadrante]

8 $b = c = 0$ [circonferenze passanti per l'origine e con centro sull'asse x]

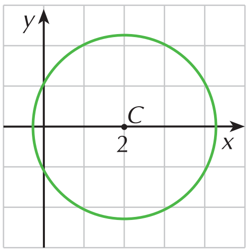
9 $a = c = 0,\ b > 0$ [circonferenze passanti per l'origine e con centro sul semiasse negativo dell'asse y]

10 $a = 0,\ b < 0$ [circonferenze con centro sul semiasse positivo dell'asse y]

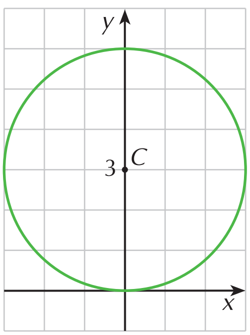
11 Deduci dal grafico il valore dei coefficienti a e b e indica i casi in cui è $c = 0$.

a. 

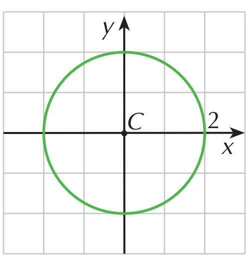
$[a = 0,\ b = -4,\ c \neq 0]$

b. 

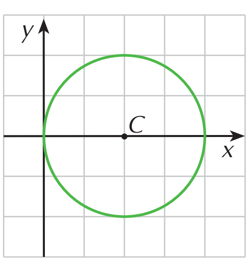
$[a = -4,\ b = 0,\ c \neq 0]$

c. 

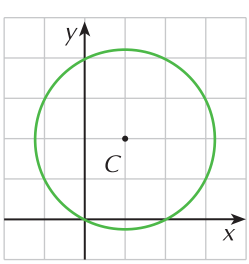
$[a = c = 0,\ b = -6]$

d. 

$[a = b = 0,\ c = -4]$

e. 

$[b = c = 0,\ a = -4]$

f. 

$[a = -2,\ b = -4]$

12 Stabilisci se i seguenti punti sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza γ di equazione $x^2+y^2-4x-4=0$: $A(3, 0)$ $B(0, 2)$ $D(-2, 1)$
(Suggerimento: per stabilire la posizione dei punti rispetto alla circonferenza basta calcolare la distanza tra ciascun punto e il centro della circonferenza e confrontarla poi con il raggio)
[interno, appartenente, esterno]

13 Stabilisci se i seguenti punti sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza γ di equazione $x^2+y^2+2x-4y+1=0$: $A(2, 2)$ $B(0, 2)$ $D(-1, -2)$ $E(-1, 0)$
[esterno, interno, esterno, appartenente]

14 Stabilisci se i seguenti punti sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza γ di equazione $4x^2+4y^2-16x=0$: $A(4, 1)$ $B(1, -1)$ $D(1, -2)$ $E\left(1, \sqrt{3}\right)$
[esterno, interno, esterno, appartenente]

Rivedi la teoria

Come determinare l'equazione di una circonferenza

Risolviamo insieme alcuni problemi relativi alla determinazione dell'equazione della circonferenza. Perchè ciò sia possibile dobbiamo disporre di tre condizioni indipendenti perchè tre sono i coefficienti dell'equazione da determinare.
In particolare:

- la conoscenza del centro equivale a due condizioni; se, per esempio si ha che $C(2, 1)$, si ottengono le due equazioni $-\frac{a}{2}=2 \wedge -\frac{b}{2}=1$
- la conoscenza del raggio fornisce una condizione; se, per esempio si ha che $r=3$, si può scrivere l'equazione $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=3$
- la conoscenza delle coordinate di un punto equivale a una condizione; l'equazione corrispondente si ottiene sostituendo le coordinate del punto nell'equazione canonica della circonferenza
- l'appartenenza del centro a una retta equivale a una condizione; l'equazione corrispondente si ottiene sostituendo le generiche coordinate del centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ nell'equazione della retta.

Molti problemi si possono risolvere anche sfruttando le proprietà geometriche della circonferenza. Negli esempi che seguono verrà di volta in volta specificato il metodo scelto per la risoluzione.

I Problema: scrivere l'equazione di una circonferenza conoscendo le coordinate del centro e la misura del raggio

L'equazione della circonferenza in funzione del centro $C(p, q)$ e del raggio r è: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della circonferenza di centro $C(2, -1)$ e raggio $r=2$.

Applichiamo la precedente relazione: $(x-2)^2+(y+1)^2=2^2$
svolgendo i calcoli otteniamo: $x^2-4x+4+y^2+2y+1=4$
cioè: $x^2+y^2-4x+2y+1=0$

PROVA TU

Scrivi l'equazione della circonferenza che:

a. ha centro in $C\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ e raggio $r = 1$

completa l'equazione: $(x - ....)^2 + (y - ....)^2 = ...$

svolgi i calcoli: .... $[4x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 33 = 0]$

b. ha centro in $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e passa per $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$

il raggio della circonferenza è il segmento CP : $\overline{CP} =$ ....

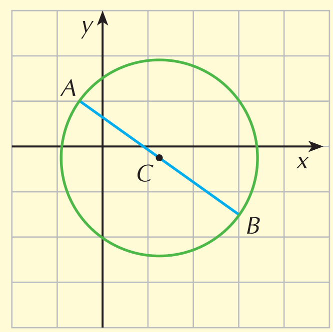
completa adesso l'equazione e svolgi i calcoli: $(x - ....)^2 + (y - ....)^2 = ...$ $[4x^2 + 4y^2 - 12y + 1 = 0]$

Rivedi la teoria

II Problema: scrivere l'equazione di una circonferenza conoscendo le coordinate degli estremi di un diametro

Per risolvere questo problema utilizziamo il metodo geometrico.

Essendo AB il diametro, il centro C della circonferenza coincide con il punto medio del segmento AB e il raggio è la metà di AB. Ci siamo in tal modo ricondotti al ***I Problema***.



ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della circonferenza che ha come diametro il segmento $A(3, -4)$ e $B(-5, 2)$.

Calcoliamo le coordinate del centro: $x_C = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad y_C = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

da cui $C(-1, -1)$.

Il raggio corrisponde alla metà del segmento AB (oppure al segmento AC).

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(3+5)^2 + (-4-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64+36} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$$

Scriviamo ora l'equazione della circonferenza dati centro e raggio:

$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5^2 \qquad \rightarrow \qquad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

PROVA TU

Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento avente per estremi l'origine e il punto $P(3, 2)$.

Il centro della circonferenza è il punto medio del segmento OP e ha coordinate:

$$x = ... \qquad y = ...$$

Il raggio è la metà del segmento OP : $\quad r = \frac{1}{2}\sqrt{.............}$

Scrivi adesso l'equazione della circonferenza. $[x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0]$

Rivedi la teoria

III Problema: scrivere l'equazione di una circonferenza conoscendo le coordinate di tre suoi punti

Sfruttando la condizione di appartenenza di un punto ad una curva impostiamo un sistema di tre equazioni (tre sono i punti per cui passa la circonferenza), in tre incognite (i coefficienti a, b, c contenuti nell'equazione).

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(3, 1)$, $B(0, 2)$, $C(1, 1)$.

Considerata l'equazione canonica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, basta imporre la condizione di appartenenza di un punto ad una curva che si ottiene sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della curva:

$$\begin{cases} 9 + 1 + 3a + b + c = 0 & \text{appartenenza del punto } A \\ 0 + 4 + 2b + c = 0 & \text{appartenenza del punto } B \\ 1 + 1 + a + b + c = 0 & \text{appartenenza del punto } C \end{cases}$$

Risolvendo il sistema trovi i valori dei parametri a, b, c dell'equazione della circonferenza.

$[x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0]$

PROVA TU

Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per l'origine e per i punti $A(1, -2)$ e $B(-3, 1)$.

Poiché la circonferenza passa per l'origine, puoi già dire che $c = ...$

Sostituendo le coordinate del punto A ottieni: ....

Sostituendo le coordinate del punto B ottieni: ....

Risolvi adesso il sistema delle equazioni ottenute. $[x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0]$

Rivedi la teoria

IV Problema: scrivere l'equazione di una circonferenza sapendo che il centro appartiene ad una retta assegnata e che passa per due punti dati

Data l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, imponiamo il passaggio per i due punti e imponiamo che le generiche coordinate del centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ soddisfino l'equazione della retta data.

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(3, 0)$ e $B(0, -3)$ e avente il centro sulla retta di equazione $y = -2x + 3$.

Imponiamo la condizione di passaggio della circonferenza per i punti A e B, cioè sostituiamo le coordinate di questi punti nell'equazione della circonferenza.

Ottieniamo così le condizioni: $9 + 3a + c = 0$ e $9 - 3b + c = 0$

La condizione di appartenenza del centro $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ alla retta data è: $-\frac{b}{2} = -2\left(-\frac{a}{2}\right) + 3$.

Scriviamo il sistema delle tre equazioni ottenute nelle tre incognite a, b, c:

$$\begin{cases} 9 + 3a + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \\ -\dfrac{b}{2} = a + 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -6 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

L'equazione della circonferenza richiesta è quindi: $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$.

PROVA TU

Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(2, 0)$, $B(-1, 3)$ e che ha il centro sulla retta $3x - 2y = 0$.

Imponi il passaggio della circonferenza per A : ....

Imponi il passaggio della circonferenza per B : ....

Sostituisci le coordinate generiche del centro nell'equazione della retta: $3 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - 2 \cdot (.....) = 0$

Risolvi il sistema delle tre equazioni ottenute.

$[x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0]$

Fai gli esercizi

15 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(3, 3)$ e raggio uguale a 5.
$[x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0]$

16 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(2, -3)$ e passa per l'origine.
(Suggerimento: la misura del segmento CO corrisponde a quella del raggio) $[x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0]$

17 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento AB di estremi $A(-1, 4)$ e $B(2, 1)$.
$[x^2 + y^2 - x - 5y + 2 = 0]$

18 Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per l'origine e per i punti $A(0, 2)$ e $B(3, 2)$.
$[x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0]$

19 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro in $C\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ e passa per il punto $A(-1, 1)$.
$[x^2 + y^2 + 6x - y + 5 = 0]$

20 Scrivi l'equazione della circonferenza che interseca l'asse x nel punto di ascissa 3, l'asse y nel punto di ordinata -3 e passa per il punto $P(3, -6)$.
(Suggerimento: le informazioni ti danno in sostanza le coordinate di tre punti) $[x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0]$

21 Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(0, -1)$ e raggio $r = \sqrt{7}$. $[x^2 + y^2 + 2y - 6 = 0]$

22 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento $A(-3,\ 3)$ e $B(1,\ -5)$ $[x^2+y^2+2x+2y-18=0]$

23 La retta di equazione $y=2x+2$ interseca gli assi cartesiani nei punti A e B; scrivi l'equazione della circonferenza di diametro AB. $[x^2+y^2+x-2y=0]$

24 Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $A(3,\ 0)$, $B(0,\ -3)$ e $C(0,\ 1)$. $[x^2+y^2+2x+2y-18=0]$

25 Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro in $C\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ e passante per il punto P appartenente alla retta di equazione $y=-\frac{1}{2}x+3$ di ascissa 2. $[x^2+y^2+x-3y-4=0]$

26 Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro nel punto di intersezione delle rette di equazione $2x-4y=15$ e $x+y=\frac{9}{4}$ e $r=\sqrt{\frac{1}{2}}$. $[16x^2+16y^2-128x+56y+297=0]$

27 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(3,\ 4)$ e $B(0,\ -5)$ e avente il centro sulla retta di equazione $2x+4y=2$. $[x^2+y^2-6x+2y-15=0]$

28 Scrivi l'equazione della circonferenza concentrica a quella di equazione $x^2+y^2+3x-y-4=0$ e avente raggio $r=3$. $[2x^2+2y^2+6x-2y-13=0]$

29 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi A e B corrispondenti alle intersezioni della retta di equazione $y=2x$ con le rette di equazione $4x-y=8$ e $y=7x-10$. $[x^2+y^2-6x-12y+40=0]$

30 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(3,\ 1)$ e $B(3,\ 3)$ e avente il centro sulla retta di equazione $3y-5-x=0$. $[x^2+y^2-2x-4y=0]$

Rivedi la teoria

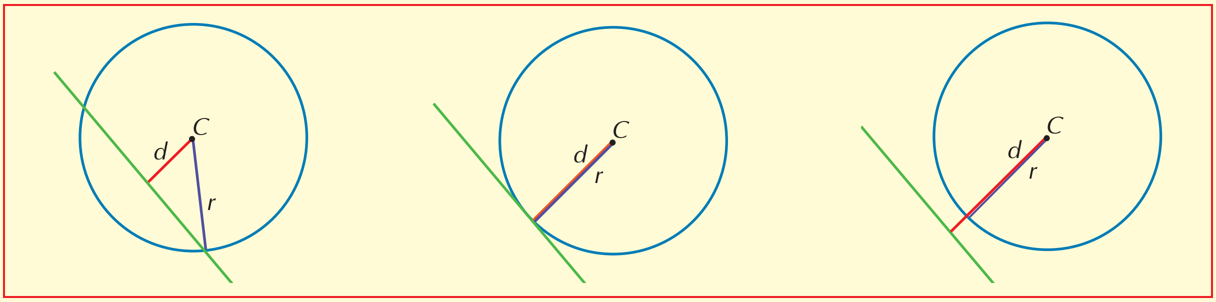
Posizioni reciproche di una circonferenza e una retta

Per determinare **algebricamente** le intersezioni, se esistono, tra una retta e una circonferenza basta risolvere il sistema formato dalle loro equazioni:

- se si ottengono due soluzioni distinte, la retta è **secante**
- se le due soluzioni sono coincidenti, la retta è **tangente** alla circonferenza
- se non si trova alcuna soluzione, la retta è **esterna** alla circonferenza.

E' anche possibile risolvere il problema con considerazioni geometriche: dopo aver calcolato la distanza d tra la retta e il centro della circonferenza la si confronta con il raggio r:

- se $d<r$, la retta è **secante**;
- se $d=r$, la retta è **tangente**;
- se $d>r$, la retta è **esterna**.



ESERCIZIO GUIDA

a. Stabiliamo la posizione reciproca tra l'asse x e la circonferenza di equazione $x^2+y^2+6x+8y+9=0$. Troviamo inoltre le coordinate dei punti di intersezione, nel caso esistano.

Intersechiamo la circonferenza con l'asse x, risolviamo il sistema ottenuto:

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x+8y+9=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x^2+6x+9=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$$

Poiché abbiamo trovato due soluzioni coincidenti nel punto $P(-3, 0)$, possiamo concludere che la retta è tangente alla circonferenza in P.

b. Verifichiamo che la retta r di equazione $y=x+5$ è esterna rispetto alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-4y=0$.

Risolviamo calcolando la distanza del centro dalla retta; ricordando che la formula della distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta di equazione $ax+by+c=0$ è $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

- troviamo centro e raggio della circonferenza:

$$x_C=-\frac{a}{2}=2 \qquad y_C=-\frac{b}{2}=2 \qquad \to \qquad C(2, 2)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4\cdot 0}=\frac{1}{2}\sqrt{32}=2\sqrt{2}$$

- scriviamo l'equazione della retta r in forma implicita: $x-y+5=0$
- calcoliamo la distanza di C da r: $d=\dfrac{|2-2+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

Essendo $d>r$, la retta è esterna alla circonferenza.

PROVA TU

a. Stabilisci la posizione della retta $x-2y+1=0$ rispetto alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+x-2y-3=0$.

Conviene calcolare centro e raggio della circonferenza: $C(.....,\ .....)$ $\qquad r=.....$

Calcola adesso la distanza di C dalla retta: $d=\dfrac{|..............|}{\sqrt{..........}}=.........$

Puoi concludere che la retta è secante la circonferenza.

b. Trova, se esistono, i punti d'intersezione della circonferenza $x^2+y^2-4x-5=0$ con la retta $x-y+1=0$.

Dovendo trovare le coordinate degli eventuali punti d'intersezione, conviene risolvere il sistema delle equazioni delle due curve.

Trovi così i punti di coordinate $(2, 3)$ e $(-1, 0)$.

Rivedi la teoria

Il caso particolare delle rette tangenti

Per trovare la retta tangente ad una circonferenza si può procedere in due modi.

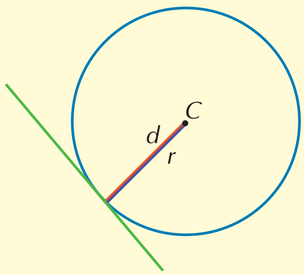
I modo:

- si scrive il sistema fra l'equazione della circonferenza e l'equazione della retta e si trova l'equazione risolvente
- si impone che il discriminante di tale equazione sia uguale a zero.

Questo metodo comporta però calcoli spesso laboriosi.

II modo:

- si calcola la distanza del centro della circonferenza dalla retta
- si impone che tale distanza sia uguale al raggio.



Se la retta tangente passa per un punto $P(x_0, y_0)$ che appartiene alla circonferenza si può anche:

- usare le formule di sdoppiamento ponendo

$x_0 x$	al posto di	x^2
$y_0 y$	al posto di	y^2
$\frac{1}{2}(x + x_0)$	al posto di	x
$\frac{1}{2}(y + y_0)$	al posto di	y

- detto C il centro della circonferenza, scrivere l'equazione della retta che passa per P ed è perpendicolare a CP.

ESERCIZIO GUIDA

a. Scriviamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ condotte dal punto $P(0, 1)$.

Il punto P non appartiene alla circonferenza; infatti, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della circonferenza, si ottiene: $0^2 + 1^2 - 2 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 6 = 1 \neq 0$.
Non è allora possibile utilizzare le formule di sdoppiamento.

Risolviamo il problema seguendo il procedimento indicato nel ***I modo***.

Scriviamo l'equazione della generica retta passante per P utilizzando l'equazione del fascio proprio di rette: $y - y_P = m(x - x_P)$.
Nel nostro caso, otteniamo: $y - 1 = mx \quad \rightarrow \quad y = mx + 1$

Scriviamo ora il sistema formato dalle equazioni della circonferenza e del fascio:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione di y nella prima equazione: $\begin{cases} x^2 + (mx+1)^2 - 2x - 6(mx+1) + 6 = 0 \\ y = mx + 1 \end{cases}$

Otteniamo così l'equazione risolvente: $x^2 + m^2x^2 + 1 + 2mx - 2x - 6mx - 6 + 6 = 0$.

Ordiniamo e raccogliamo: $x^2(1+m^2)-2x(2m+1)+1=0$

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4}$: $(2m+1)^2-(1+m^2)$

La condizione di tangenza $\left(\frac{\Delta}{4}=0\right)$ nel nostro caso è quindi: $(2m+1)^2-(1+m^2)=0$.

Risolvendo l'equazione in m si ottiene: $3m^2+4m=0 \quad \rightarrow \quad m=0 \quad \vee \quad m=-\frac{4}{3}$

Le equazioni delle rette tangenti si ottengono sostituendo a m i valori trovati nell'equazione della retta per P:

- per $m=0$: $\quad y=1$
- per $m=-\frac{4}{3}$: $\quad y=-\frac{4}{3}x+1$

Risolviamo ora l'esercizio seguendo il procedimento indicato nel ***II modo***.

Scriviamo l'equazione del fascio di rette per P in forma implicita: $mx-y+1=0$.

Calcoliamo centro e raggio della circonferenza:

$x_C=-\frac{-2}{2}=1 \qquad y_C=-\frac{-6}{2}=3 \quad \rightarrow \quad C(1,3)$

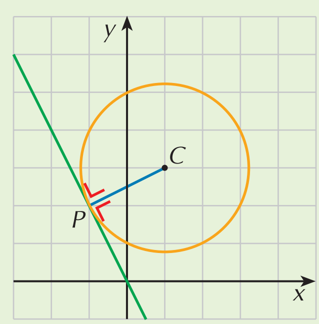
$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4\cdot 6}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

Calcoliamo la distanza del centro dal fascio di rette: $d=\frac{|m\cdot 1-3+1|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$

Imponiamo che tale distanza sia uguale al raggio: $\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

Risolvendo l'equazione in m così ottenuta troviamo gli stessi valori precedenti.

b. Scriviamo le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ condotte dal suo punto $P(-1,2)$.



Verifichiamo dapprima che il punto P appartenga alla circonferenza:

$1+4+2-12+5=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$

Il centro della circonferenza è il punto $C(1,3)$ e la retta tangente è perpendicolare alla retta del raggio CP; quindi:

- troviamo il coefficiente angolare della retta CP:

  $m_{CP}=\frac{y_C-y_P}{x_C-x_P}=\frac{3-2}{1+1}=\frac{1}{2}$

- il coefficiente angolare della retta tangente è: $m'=-2$

Scriviamo adesso l'equazione della retta che passa per P ed ha coefficiente angolare -2:

$y-2=-2(x+1) \quad \rightarrow \quad y=-2x$

c. Scriviamo l'equazione della circonferenza passante per il punto $A(0,2)$ e tangente nell'origine alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

I condizione: la circonferenza passa per $A(0,2)$: $0^2+2^2+0\cdot a+2b+c=0 \quad \rightarrow \quad 4+2b+c=0$

II condizione: oltre che per A la circonferenza passa anche per l'origine: $c=0$

III condizione: la tangenza con la retta $y = -x$:

tenendo conto della condizione $c = 0$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ y = -x \end{cases}$

equazione risolvente: $2x^2 + x(a - b) = 0$

condizione di tangenza: $(a - b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad a - b = 0$

In definitiva dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} 4 + 2b + c = 0 \\ c = 0 \\ a = b \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$

L'equazione della circonferenza richiesta è dunque $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

PROVA TU

a. Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ condotte dall'origine degli assi.

Utilizza il metodo distanza centro-retta uguale al raggio.

La circonferenza ha centro in C(....., ...) e raggio $r =$ ....

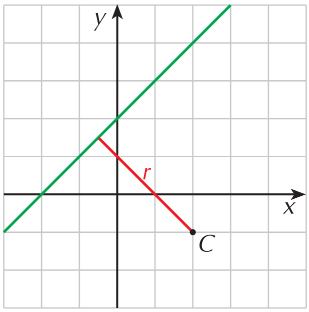
La generica retta che passa per l'origine ha equazione $y = mx$, cioè in forma implicita $y - mx = 0$.

Calcola la distanza del centro dalla retta: $d = \dfrac{|..............|}{\sqrt{..........}} =$ ....

Imponi che tale distanza sia uguale al raggio: .... = ...

Risolvi l'equazione e trova il valore dei coefficienti angolari delle due rette tangenti. $\left[y = \frac{1}{3}x;\ y = -3x\right]$

b. Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(2, -1)$ che è tangente alla retta di equazione $y = x + 2$.



Osserva il grafico: il raggio della circonferenza è la distanza del punto C dalla retta.

Calcola dunque la distanza: $d =$ ....

Scrivi l'equazione della circonferenza noti centro e raggio:

$(x - ...)^2 + (y - ...)^2 =$ .... $[2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 15 = 0]$

Fai gli esercizi

31 Stabilisci se le rette r assegnate sono esterne, secanti o tangenti rispetto alla circonferenza data. Nel caso di rette tangenti o secanti, calcola le coordinate del punto di intersezione.

a. $y = -2$ $\quad \Gamma : x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$ [tangente in $(3, -2)$]

b. $y = x$ $\quad \Gamma : 9x^2 + 9y^2 = 4$ $\left[\text{secante in } \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3};\ \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

c. $y = x - 4$ $\quad \Gamma : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ [esterna]

d. $x - 2y = 1$ $\quad \Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ $\left[\text{secante in } (3, 1); \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right]$

e. $x = 2y - 4$ $\qquad \Gamma : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ [tangente in $(2, 3)$]

f. $y = -2x - 3$ $\qquad \Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ [esterna]

32 Scrivi le equazioni delle rette passanti per il punto P assegnato e tangenti alla circonferenza data.

a. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ $\qquad P(2, 1)$ $[3x - 4y - 2 = 0$ e $x = 2]$

b. $2x^2 + 2y^2 + x + y - 6 = 0$ $\qquad P(1, 1)$ $[x + y - 2 = 0]$

c. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ $\qquad P(-1, 1)$ $[x = -1]$

d. $x^2 + y^2 - x + 3y = 0$ $\qquad P(0, 2)$ $\left[y = 3x + 2,\ y = -\dfrac{13}{9}x + 2\right]$

e. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 3y = 0$ $\qquad P(0, 0)$ $[2x - 3y = 0]$

33 Determina le intersezioni tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$ e la retta di equazione $2y + x - 5 = 0$ $[(-1, 3), (3, 1)]$

34 Determina le intersezioni tra la circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 + 3x - 2 = 0$ e la retta di equazione $y = \dfrac{1}{2}x + 1$. Trova poi la lunghezza della corda che ha come estremi tali punti. $\left[(-2, 0), (0, 1), \sqrt{5}\right]$

35 Trova la lunghezza della corda intercettata dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ sulla bisettrice del primo e terzo quadrante. $\left[3\sqrt{2}\right]$

36 Determina l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(1, 2)$ e che stacca sull'asse x una corda AB di lunghezza uguale a 8.
(Suggerimento: traccia la distanza del centro dall'asse x; il punto trovato è il punto medio della corda AB) $[x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0]$

37 Determina l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(3, -2)$ e che stacca sull'asse y una corda di lunghezza uguale a 6. $[x^2 + y^2 - 6x + 4y - 5 = 0]$

38 Un triangolo isoscele è inscritto nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$ e la base appartiene alla retta $x + 2y - 1 = 0$. Trova le coordinate dei suoi vertici sapendo che il centro della circonferenza è un punto interno al triangolo. $\left[(3, -1), (-1, 1), \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, -\sqrt{5} - 1\right)\right]$

39 Scrivi l'equazione della circonferenza tangente all'asse x e avente centro in $C(2, -2)$; verifica poi che è anche tangente all'asse y.
(Suggerimento: il raggio della circonferenza è la distanza del punto C dall'asse x, cioè è il valore assoluto della sua ordinata) $[x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0]$

40 Data la circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 + x + y - 6 = 0$ scrivi l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto P di ascissa 1 e di ordinata positiva. $[x + y - 2 = 0]$

41 Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro in $C(1, 4)$ e tangente alla retta di equazione $y = x - 6$. $[2x^2 + 2y^2 - 4x - 16y - 47 = 0]$

42 Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i punti $(-2, 1)$, $(0, 1)$, $(0, -2)$ e trova poi l'equazione delle rette ad essa tangenti che passano per il punto $(-1, 3)$. $\left[x^2 + y^2 + 2x + y - 2 = 0;\ y = \pm\dfrac{6}{\sqrt{13}}(x + 1) + 3\right]$

43 Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(1, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 1)$, trova poi l'equazione delle rette tangenti nei punti A e C e l'area del triangolo formato dalle due tangenti e dal segmento AC. $\left[x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0;\ 2x + y - 3 = 0;\ x - 2y + 6 = 0;\ \text{area} = \dfrac{5}{2}\right]$

44 Scrivi le equazioni delle rette parallele alla retta di equazione $y = x + 46$ che sono tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
(Suggerimento: metti a sistema la circonferenza con il fascio improprio di rette di equazione $y = x + k$, imponi la condizione di tangenza e da essa ricava il valore di k). [$y = x + \sqrt{2}$, $y = x - \sqrt{2}$]

45 Scrivi l'equazione della circonferenza tangente all'asse y avente centro in centro $C\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.
[$x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$]

Rivedi la teoria

Posizioni reciproche di due circonferenze

Già sai che due circonferenze possono essere secanti in due punti, tangenti in uno stesso punto internamente o esternamente, una interna all'altra, concentriche o esterne.
Per determinare gli eventuali punti di tangenza o di intersezione si risolve il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze.

ESERCIZIO GUIDA

Troviamo le coordinate dei punti di intersezione, se esistono, delle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + x - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$.

Impostiamo il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Applichiamo il metodo di riduzione e sottraiamo membro a membro le due equazioni: $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

La retta di equazione $x = 0$ rappresenta l'equazione dell'**asse radicale**, cioè, in questo caso, della retta che passa per i punti di intersezione delle due circonferenze.

Proseguendo nella risoluzione del sistema otteniamo $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

che ha come soluzione: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Le circonferenze date si incontrano in $A(0, 1)$ e $B(0, -1)$.

PROVA TU

Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$ si intersecano nei punti A e B; calcola la lunghezza della corda AB.

Trova i punti di intersezione delle due circonferenze risolvendo il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0 \end{cases}$$

Per una risoluzione rapida conviene sottrarre membro a mebro le due equazioni in modo da ottenere un'equazione di primo grado.

Trovi così i punti A(....., ...) e B(....., ...).

Calcola adesso la lunghezza di AB : $\overline{AB}$ = ... [$2\sqrt{2}$]

46 Trova le coordinate dei punti di intersezione, se esistono, delle circonferenze che hanno le seguenti equazioni:

a. $x^2 + y^2 = 4$ $\quad$ $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ $\quad$ [(−2, 0)]

b. $x^2 + y^2 = 8 - 2y - x$ $\quad$ $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 12$ $\quad$ [(−1, − 4), (−1, 2)]

c. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ $\quad$ [nessuna intersezione]

d. $x^2 + y^2 = 4$ $\quad$ $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 79 = 0$ $\quad$ [nessuna intersezione]

47 Trova le coordinate dei punti di intersezione, se esistono, della circonferenza di equazione $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ con quella che ha centro in $C(-1, -4)$ e raggio $r = 4$. $\quad$ [(−1, 0)]

Verifica del recupero

1 Stabilisci se le seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze ed in caso affermativo trovane il centro ed il raggio:

a. $x^2 + y^2 - x + 7 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

c. $x^2 + y^2 + x + y - 3 = 0$

15 punti

2 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(2, -4)$ e passa per l'origine.

15 punti

3 Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i punti di coordinate $(1, -1)$, $(0, 4)$, $(-2, 1)$.

15 punti

4 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(-2, 1)$ ed è tangente alla retta $y = 2x - 4$.

15 punti

5 La circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$ interseca la retta di equazione $y = 1 - x$ nei punti A e B. Determina la lunghezza della corda AB.

10 punti

6 Trova le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$

a. che passano per il punto $P(0, 3)$

b. parallele alla retta $2x - 4y + 1 = 0$.

20 punti

Soluzioni

1 **a.** non è una circonferenza

b. $C(2, -1)$ $\quad r = \sqrt{5}$

c. $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad r = \frac{1}{2}\sqrt{14}$

2 $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$

3 $x^2 + y^2 - x - 3y - 4 = 0$

4 $5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y - 56 = 0$

5 $\overline{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

6 **a.** $y = (4 \pm \sqrt{21})x + 3$

b. $x - 2y - 4 \pm \sqrt{30} = 0$

Esercizio	1	2	3	4	5	6	
Punteggio							

Punteggio

Voto: $\frac{\text{punteggio}}{10} + 1 =$