Equazione irrazionale

In matematica, un'**equazione irrazionale** in una incognita è un'equazione algebrica in cui l'incognita compare all'interno del radicando di uno o più radicali. Ad esempio:

$$x + \sqrt{2x - 3} = 12$$

Non sono invece irrazionali (sebbene alcuni coefficienti siano irrazionali) equazioni come la seguente:

$$x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{13} = 1$$

dal momento che i radicali non contengono l'incognita x.

Per risolvere questo tipo di equazioni è sufficiente tenere presente il fatto che, elevando entrambi i membri di un'equazione all'n-esima potenza (con n intero e maggiore di 1), si ottiene un'equazione che ammette tutte le soluzioni di quella data, ma, in generale, può ammettere anche altre soluzioni. Vediamo alcuni esempi:

$$\sqrt{5x + 1} = 4$$

Elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione, si ottiene:

$$5x + 1 = 16$$

che ha come unica soluzione $x = 3$, che soddisfa anche l'equazione originaria. Sia invece da risolvere l'equazione seguente:

$$\sqrt{16 - x} = x - 4$$

elevando al quadrato, si ottiene l'equazione:

$$16 - x = (x - 4)^2$$

Le soluzioni di questa equazione quadratica sono $x = 0$ ed $x = 7$, ma si verifica facilmente che solo la seconda soddisfa l'equazione originaria. In effetti, se si eleva ad un esponente dispari, si ottiene un'equazione equivalente a quella data; se si eleva invece ad un esponente pari, è possibile che si aggiungano delle soluzioni spurie. Infatti, data una relazione della forma:

$$A(x) = B(x)$$

elevando al quadrato si ottiene la forma:

$$[A(x)]^2 = [B(x)]^2$$

che, portando tutto a primo membro e scomponendo la differenza di due quadrati, si può riscrivere così:

$$[A(x) - B(x)] \cdot [A(x) + B(x)] = 0$$

Per cui, oltre alle soluzioni dell'equazione di partenza, vi sono anche le eventuali soluzioni dell'equazione:

$$A(x) = -B(x)$$

In definitiva, quando, al fine di eliminare i radicali per ricondursi ad un'equazione razionale, si elevano entrambi i membri di un'equazione ad un esponente pari, bisogna poi ricordarsi di verificare se le soluzioni ottenute risolvano effettivamente l'equazione originaria.

Vediamo adesso alcuni casi particolarmente frequenti di equazioni irrazionali.

Equazione intera con un solo radicale

Questo è sicuramente il caso più semplice. Dopo aver isolato il radicale (facendo in modo che tutti gli altri termini compaiano nell'altro membro dell'equazione), ci si riconduce ad un'equazione di questa forma:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ rappresentano due funzioni razionali. In questo caso è sufficiente elevare ad n entrambi i membri per ricondursi ad un'equazione razionale, ricordandosi, qualora n sia pari, di verificare la presenza di eventuali soluzioni spurie.

Ad esempio:

$$\sqrt[3]{x^3 + 19} - x = 1$$

Dapprima si isola il radicale:

$$\sqrt[3]{x^3 + 19} = x + 1$$

Elevando al cubo e semplificando, si ottiene l'equazione di secondo grado:

$$x^2 + x - 6$$

Le soluzioni di questa equazione sono $x = 2$ ed $x = -3$, che sono anche le soluzioni dell'equazione originaria.

Equazione intera con due radicali quadratici

Un'equazione intera contenente due radicali quadratici e altri termini razionali si può scrivere nella forma:

$$\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} = C(x)$$

In questo caso, è possibile isolare un radicale, oppure si possono riunire entrambi i radicali nello stesso membro e trasportare nell'altro membro i termini razionali. In entrambi i casi, elevando al quadrato si ottiene un'equazione con un solo radicale quadratico, che si può risolvere come trattato nel caso precedente.
Vediamo un esempio:

$$\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{8 - 4x} = x$$

Isoliamo il primo radicale:

$$\sqrt{x^2 + 8} = x + \sqrt{8 - 4x}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$x^2 + 8 = x^2 + (8 - 4x) + 2x\sqrt{8 - 4x}$$

Semplificando, l'equazione diventa:

$$x\sqrt{8-4x}=2x$$

Si vede immediatamente che $x = 0$ è soluzione, per cui, supposto $x \neq 0$, possiamo dividere per x:

$$\sqrt{8-4x}=2$$

Elevando ancora al quadrato si ottiene:

$$8 - 4x = 4$$

La cui soluzione è $x = 1$. Dal momento che anche questa soluzione soddisfa l'equazione di partenza, le due soluzioni sono 0 ed 1.

Equazione intera con tre o quattro radicali quadratici

Un'equazione intera contenente tre radicali quadratici ed altri termini razionali, oppure una contenente quattro radicali quadratici, si risolve riunendo due radicali in uno stesso membro e trasportando tutto il resto nell'altro membro. In questo modo, elevando al quadrato, si ottiene un'equazione che contiene al più due radicali quadratici, rientrando pertanto nei casi precedenti. Ad esempio:

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}-\sqrt{3x+2}$$

Prima di elevare al quadrato, conviene spostare alcuni radicali (questo passaggio è utile solo al fine di semplificare i calcoli):

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{3x}+\sqrt{2x+5}$$

Eleviamo al quadrato:

$$2x+3+3x+2+2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}=3x+2x+5+2\sqrt{3x(2x+5)}$$

Che, dopo facili calcoli, diventa:

$$\sqrt{6x^2+13x+6}=\sqrt{6x^2+15x}$$

Eleviamo di nuovo al quadrato:

$$6x^2+13x+6=6x^2+15x$$

Risolvendo quest'equazione si ottiene $x = 3$, e si verifica facilmente che essa è effettivamente soluzione dell'equazione data.

Equazione irrazionale fratta

Se l'equazione irrazionale non è intera, è sufficiente ridurla a forma intera (moltiplicando tutti i termini per il minimo comune multiplo dei denominatori) per rientrare nei casi già visti. Ad esempio:

$$\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Moltiplichiamo tutti i termini per $\sqrt{x}(4+\sqrt{x})$:

$$\sqrt{4x^2+20x}=16-x$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$4x^2 + 20x = 256 + x^2 - 32x$$

Le soluzioni di quest'equazione quadratica sono $x = -\frac{64}{3}$ ed $x = 4$. Tuttavia, la prima delle due soluzioni non è accettabile, dal momento che deve essere $x \geq 0$. L'unica soluzione dell'equazione iniziale è perciò $x = 4$.

Elevando entrambi i membri al quadrato otteniamo

che ci dà come soluzione $x_1 = 7; \quad x_2 = 2$.
Questi valori saranno anche soluzione dell'equazione di partenza?
Per verificarlo sostituiamo 7 e 2 nell'equazione irrazionale data.

Sostituiamo *x=7*

Primo membro	**Secondo membro**
$\sqrt{49+21-6} = 8$	$2 \cdot 7 - 6 = 8$

Ora sostituiamo *x=2*

$\sqrt{4+6-6} = 2$	$2(2) - 6 = -2$

Nel secondo caso, poiché i due membri dell'equazione non hanno lo stesso valore, la radice *x=2* non è soluzione dell'equazione irrazionale.

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali, controllando l'accettabilità delle soluzioni. 1)

1. $\sqrt{2x+5} = 3(x-1)$ [Perché la soluzione $\frac{2}{9}$ non è accettabile?]
2. $\sqrt{3x(x+2)+1} = (x+1)^2 + x$ [0; -4]
3. $\sqrt{\frac{1}{5}x(3x-1)} = -\frac{2}{3}(1+3x)$ [-5]
4. $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ [Perché la soluzione $-\sqrt{13}$ non è accettabile?]

(dopo aver elevato al quadrato due volte, si ottiene $3 = \sqrt{x^2 - 4}$ ….)

5. $2x = \sqrt{x}$ [0; $\frac{1}{4}$]
6. $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2x - 6$ [7]

13 $\sqrt{x-3}=\sqrt{1-x}$; $\quad \sqrt{x}+x+7=0$; $\quad \sqrt{x-2}+x-2=-4$.

14 $\sqrt{-x^2-1}=x$; $\quad \sqrt{x+1}=\sqrt{x+2}$; $\quad \sqrt{x^2-3}=-x^2-2$.

15 $\sqrt{x^2+9}=x$; $\quad \sqrt{x-4}+x+5=0$; $\quad \sqrt{x-3}+x-2=0$.

16 $3\sqrt{x+1}+5\sqrt{4x}=0$; $\quad \sqrt{x^2+1}=0$; $\quad \sqrt{x^2+x^4+7}=0$; $\quad \sqrt{4-x^2}-\sqrt{x^2-81}-x=0$.

17 $\sqrt{x-5}+2\sqrt{2-x}-3x=0$; $\quad \sqrt{-x^4-4}+x=0$; $\quad \sqrt{x}+\sqrt{x-1}+1=0$.

18 $\sqrt{(x-1)(2-x)}=\sqrt{x^2-9}$.

Risolvere, senza eseguire calcoli, le seguenti equazioni e giustificare la risposta data:

19 $\sqrt{x(x-7)}=0$; $\quad \sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}=0$. [0 e 7; 3]

20 $\sqrt{x(x+3)}+\sqrt{(x+3)(x+1)}=0$. [−3]

21 $\sqrt{x^4-x^2}+x^2=0$; $\quad \sqrt{-x^2}+\sqrt{-x^4}=0$. [0; 0]

22 $\sqrt{-x^2+2x-1}+x-1=0$. [1]

23 $\sqrt{(x+1)(x+4)}+x+4=0$. [−4]

24 $\sqrt{-(2x-3)^2+4x^2-9}=0$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

Risoluzione di equazioni irrazionali contenenti radicali quadratici

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali numeriche:

1 $\sqrt{x+2}=4$; $\quad \sqrt{2-x}=1$. [14; 1]

2 $\sqrt{4-3x}=1$; $\quad \sqrt{4+2x}=6$. [1; 16]

3 $\sqrt{6x-14}-2=0$; $\quad \sqrt{5+4x}=11$. [3; 29]

4 $\sqrt{3x+4}=\sqrt{7}$; $\quad \sqrt{9x-5}=2$. [1; 1]

5 $\sqrt{x+3}=x+1$; $\quad \sqrt{x^2+4x}=x$. [1; 0]

6 $\sqrt{x^2+21}=x+3$; $\quad \sqrt{3x+7}=x-1$. [2; 6]

7 $\sqrt{x^2-11}+1=x$; $\quad \sqrt{x^2+3x+1}=x-1$. [6; impossibile]

8 $\sqrt{x-3}=3x-11$; $\quad \sqrt{3-x}=1-x$. [4; −1]

9 $\sqrt{x-3}=11-3x$; $\quad \sqrt{5+2x}=3x-3$. $\left[\frac{31}{9}; 2\right]$

10 $\sqrt{4x-3}=\sqrt{6x-1}$; $\quad \sqrt{3x-8}+2=x$. [impossibile; 3 e 4]