Correzione verifica sommativa 5S 20/01/14

Prof. V. Scaccianoce

1.a $y = \ln^2 x$ $\left[\text{ funzione logaritmica }\right]$

$D = \{x > 0\}$ $\quad F = \{0^+; +\infty\}$

Intersezioni

asse x	$(1;0)$
asse y	$\emptyset$

$y = 0$	per $x = 1$
$y > 0$	$\ln^2 x > 0$, Solution is : $\{x > 0 \wedge x \neq 1\}$
$y < 0$	$\nexists x$

Segno y

$$\begin{array}{ccc} +\infty & & 0 & \\ \uparrow & \_\_\_\_\_\_ & \uparrow & \_\_\_\_\_\_ \\ 0 & & 1 & \end{array}$$

Limiti

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^3-1}\right) = +\infty$
$\lim_{x\to 0^+}(\ln^2 x) = +\infty$

$\Rightarrow$ asintoto verticale $\quad x = 0$

Derivate

$y' = \frac{d(\ln^2 x)}{dx} = 2\frac{\ln x}{x}$

$y' = 2\frac{\ln x}{x} = 0$, Solution is : $\{x = 1\}$ $\Rightarrow$ punto stazionario a tangente orizzontale

$y' = 2\frac{\ln x}{x} > 0$, Solution is : $\{x > 1\}$

$y' = 2\frac{\ln x}{x} < 0$, Solution is : $\{0 < x < 1\}$

Segno y'

$$\begin{array}{ccccc} \infty & & 0 & \\ \uparrow & - - - - & \uparrow & \_\_\_\_\_\_ \\ 0 & \searrow & 1 & \nearrow \end{array}$$

$y'' = \frac{d\left(2\frac{\ln x}{x}\right)}{dx} = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$

$[y'']_{x=1} = \left[2\frac{1-\ln x}{x^2}\right]_{x=1} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ minimante

$[y]_{x=1} = [\ln^2 x]_{x=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad m(1;0)$ minimo assoluto

$y'' = 2\frac{1-\ln x}{x^2} = 0$, Solution is : $\{x = e\}$ possibile ascissa di flesso

$\frac{1-\ln x}{x^2} > 0$, Solution is : $\{x < 0\}, \{0 < x, x < e\}$

$\frac{1-\ln x}{x^2} < 0$, Solution is : $\{x < 0\}, \{e < x\}$

Segno y''

$$\begin{array}{ccc} & \_\_\_\_\_\_ \uparrow & - - - - - \\ 0 & e & \end{array}$$

Controlliamo la derivata terza

$y''' = \frac{d\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)}{dx} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$

$\left[\frac{-3+2\ln x}{x^3}\right]_{x=e} = -\frac{1}{e^3} \neq 0 \Rightarrow \{x = e\}$ ascissa di flesso

$F(e; f(e)) \Rightarrow f(e) = 1 \Rightarrow F(e; 1)$ flesso a tangente obliqua

Calcoliamo l'equazione della tangente di flesso applicando la formula

$$(y - y_0) = [y']_{x=x_0}(x - x_0)$$

$$(y-1) = [2\tfrac{\ln x}{x}]_{x=e}(x-e)$$
$$(y-1) = 2e^{-1}(x-e) \Rightarrow \qquad y = \tfrac{2}{e}x - 1 \qquad \left[\text{equazione tangente di flesso}\right]$$

GRAFICO 1A

1.b $y = \frac{x}{x^3-1}$ [funzione razionale fratta non pari non dispari]

$D = \{x \neq 1\} \qquad F = \{-\infty; 1^-; 1^+; +\infty\}$

Intersezioni

asse x	$(0;0)$
asse y	$(0;0)$

$y = 0$	per $x = 0$
$y > 0$	$\frac{x}{x^3-1} > 0$, Solution is : $\{x < 0\} \cup \{x > 1\}$
$y < 0$	$\frac{x}{x^3-1} < 0$, Solution is : $\{0 < x < 1\}$

Segno y

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & \infty & \\ \text{———} & \uparrow & \text{- - - - - -} & \uparrow & \text{———} \\ & 0 & & 1 & \end{array}$$

Limiti

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^3-1}\right) = 0$	asintoto orizzontale $y = 0$
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^3-1}\right) = 0$	
$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x}{x^3-1}\right) = -\infty$	
$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x^3-1}\right) = +\infty$	asintoto verticale $\quad x = 1$

Derivate

$$y' = \frac{d\left(\frac{x}{x^3-1}\right)}{dx} = -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}$$

$y' = 0$, Solution is : $\left\{x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \cong -0.7937\right\}$ punto stazionario a tangente orizzontale

$y' > 0$, Solution is : $\left\{x < -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right\}$

$y' < 0$, Solution is : $\left\{-\frac{\sqrt[3]{4}}{2} < x < 1\right\} \cup \{x > 1\}$

Segno y'

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & \infty & \\ \text{———} & \uparrow & \text{- - - - - -} & \uparrow & \text{- - - - - -} \\ & -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} & & 1 & \end{array}$$

$$y'' = \frac{d\left(-\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}\right)}{dx} = 6x^2\frac{x^3+2}{(x^3-1)^3}$$

$$[y'']_{x=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}} = \left[6x^2\frac{x^3+2}{(x^3-1)^3}\right]_{x=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}} = -\tfrac{2}{3}\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 \neq 0 \Rightarrow x = -\tfrac{\sqrt[3]{4}}{2} \text{ massimante}$$

$$[y]_{x=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}} = \left[\frac{x}{x^3-1}\right]_{x=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cong 0.52913 \quad \Rightarrow \quad M\left(-\tfrac{\sqrt[3]{4}}{2}; \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\right) \text{ max relativo}$$

$y'' = 6x^2\frac{x^3+2}{(x^3-1)^3} = 0$, Solution is : $\{x = 0\}\left\{x = -\sqrt[3]{2}\right\}$

I valori $\{x = 0\}\left\{x = -\sqrt[3]{2}\right\}$ annullano la y''. Per stabilire se si tratta di flessi la derivata terza in questi punti non deve annullarsi. Controlliamo:

$$y''' = \frac{d\left(6x^2\frac{x^3+2}{(x^3-1)^3}\right)}{dx} = -6x\frac{4x^6+19x^3+4}{(x^3-1)^4}$$

$$\left[-6x\frac{4x^6+19x^3+4}{(x^3-1)^4}\right]_{x=0} = 0 \Rightarrow \qquad \text{abbiamo bisogno della derivata quarta!}$$

$$\left[-6x\frac{4x^6+19x^3+4}{(x^3-1)^4}\right]_{x=-\sqrt[3]{2}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{2} \neq 0 \Rightarrow$$ il valore $x = -\sqrt[3]{2} \cong -1.2599$ è l'ascissa di un flesso a tangente obliqua

$$y^{V} = \frac{d\left(-6x\frac{4x^6+19x^3+4}{(x^3-1)^4}\right)}{dx} = 24\frac{5x^9+45x^6+30x^3+1}{(x^3-1)^5}$$

$$\left[24\frac{5x^9+45x^6+30x^3+1}{(x^3-1)^5}\right]_{x=0} = -24 \neq 0$$ finalmente!!

Quindi il valore $x = 0$ annulla le derivate seconda e terza ma non la quarta

Continuando il controllo, scopriamo che $[y^{V}]_{x=0} = 0$

$$x = 0\begin{cases}\text{non è max, min perchè non annulla la derivata prima}\\ \text{non è flesso perchè non annulla la derivata deconda}\end{cases}$$

ma allora cos'è? ⇒ GRAFICO 1B

1.c $y = e^{\frac{x}{x+2}}$

$D = \{x \neq -2\}$ $F = \{-\infty; -2^-; -2^{+;} +\infty\}$

Intersezioni

asse x	$\emptyset$
asse y	$(0;1)$

$y = 0$	$\emptyset$
$y > 0$	$\forall x \neq -2$
$y < 0$	$\emptyset$

Segno y

$$\underline{\qquad\qquad}\overset{\infty}{\uparrow}\underline{\qquad\qquad}$$
$$-2$$

Limiti

$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{x}{x+2}}\right) = e$	asintoto orizzontale $y = e$
$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{x}{x+2}}\right) = e$	
$\lim_{x\to-2^-}\left(e^{\frac{x}{x+2}}\right) = +\infty$	
$\lim_{x\to-2^+}\left(e^{\frac{x}{x+2}}\right) = 0^+$	asintoto verticale sx $x = -2$

Derivate

$$y' = \frac{d\left(e^{\frac{x}{x+2}}\right)}{dx} = \frac{2}{(x+2)^2}e^{\frac{x}{x+2}}$$

$y' = \frac{2}{(x+2)^2}e^{\frac{x}{x+2}} = 0 \Rightarrow \nexists\, x \Rightarrow$ non esistono punti di stazionamento a tangente orizzontale

$$y'' = \frac{d\left(\frac{2}{(x+2)^2}e^{\frac{x}{x+2}}\right)}{dx} = -4e^{\frac{x}{x+2}}\frac{x+1}{(x+2)^4}$$

$y'' = -4e^{\frac{x}{x+2}}\frac{x+1}{(x+2)^4} = 0$, Solution is : $\{x = -1\}$

Il valore $\{x = -1\}$ annulla la derivata seconda, potrebbe essere un flesso se $[y''']_{x=-1} \neq 0$

$$y''' = \frac{d\left(-4e^{\frac{x}{x+2}}\frac{x+1}{(x+2)^4}\right)}{dx} = 4e^{\frac{x}{x+2}}\frac{6x+2+3x^2}{(x+2)^6}$$

$$\left[4e^{\frac{x}{x+2}}\frac{6x+2+3x^2}{(x+2)^6}\right]_{x=-1} = -4e^{-1} \neq 0$$!!!!

Quindi $\{x = -1\}$ è ascissa di flesso a tangente obliqua

con ordinata $f(-1) = \left[e^{\frac{x}{x+2}}\right]_{x=-1} = e^{-1} \Rightarrow$ $F(-1; \frac{1}{e})$

Calcoliamo l'equazione della tangente di flesso applicando la formula

$$(y-y_0) = [y']_{x=x_0}(x-x_0)$$

$(y-\frac{1}{e}) = \left[\frac{2}{(x+2)^2}e^{\frac{x}{x+2}}\right]_{x=-1}(x+1)$

$(y-\frac{1}{e}) = 2e^{-1}(x+1) \Rightarrow \quad y = \frac{2}{e}x+\frac{3}{e} \quad$ [equazione tangente di flesso]

GRAFICO 1C

1.d $y = \frac{1+\sin x}{\cos x} \qquad [0;2\pi]$

$D = \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right] \qquad F = \left\{\frac{\pi}{2}^-;\frac{\pi}{2}^+;\frac{3\pi}{2}^-;\frac{3\pi}{2}^+\right\}$

Intersezioni

asse x	$1+\sin x = 0 \Rightarrow \{x = \frac{3}{2}\pi\}$ non accettabile $\Rightarrow \emptyset$
asse y	$(0;1)$

$y = 0$	$\emptyset$
$y > 0$	$0 \le x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$
$y < 0$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

Segno y

0 ———— $\uparrow^{\infty}_{\frac{\pi}{2}}$ - - - - - - $\uparrow^{\frac{0}{0}}_{\frac{3\pi}{2}}$ ———— 2π

Limiti

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = \infty$	
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = -\infty$	

$\Rightarrow$ asintoto verticale $x = \frac{\pi}{2}$

Per eliminare la forma indeterminata in $\frac{3\pi}{2}$ operiamo nel modo seguente

$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{(1-\sin^2 x)}{\cos x(1-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)} =$

$= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{(1-\sin x)} = 0^-$

Analogamente per $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = 0^+$

Essendo $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(f(x)) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}(f(x)) = 0$ in $x = \frac{3\pi}{2}$ abbiamo una discontinuità eliminabile

Derivate

$y' = \frac{d\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

$y' = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = 0 \quad$ per $x = \frac{3\pi}{2}$ che $\notin D \Rightarrow$ non vi sono punti stazionari

$y'' = \frac{d\left(\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\right)}{dx} = \frac{\cos^3 x-(1+\sin x)2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x+2\sin x+2\sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{1-\sin^2 x+2\sin x+2\sin^2 x}{\cos^3 x} =$

$= \frac{\sin^2 x+2\sin x+1}{\cos^3 x} = \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$

Segno y''

0 ———— $\cup$ ———— $\uparrow^{\infty}_{\frac{\pi}{2}}$ - - - $\cap$ - - - $\uparrow^{\frac{0}{0}}_{\frac{3\pi}{2}}$ ———— $\cup$ ———— 2π

GRAFICO 1D

2. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\, x < 1 \\ \ln x + 1 & se\, 1 \le x < e \\ 2 & se\, x \ge e \end{cases}$

Dobbiamo indagare su $x = 1$ e $x = e$

$\lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$
$\lim_{x\to 1^+}(\ln x + 1) = 1$
$f(1) = 1$
non coincidono

$\Downarrow$

$x = 1$ discontinuità tipo salto

$\lim_{x\to e^-}(\ln x + 1) = 2$
$\lim_{x\to e^+}(2) = 2$
$f(e) = 2$
coincidono

$\Downarrow$

in $x = e$ la funzione è continua

Controlliamo la derivabilità

Se in $x = 1$ la funzione
non è continua certamente
non è derivabile

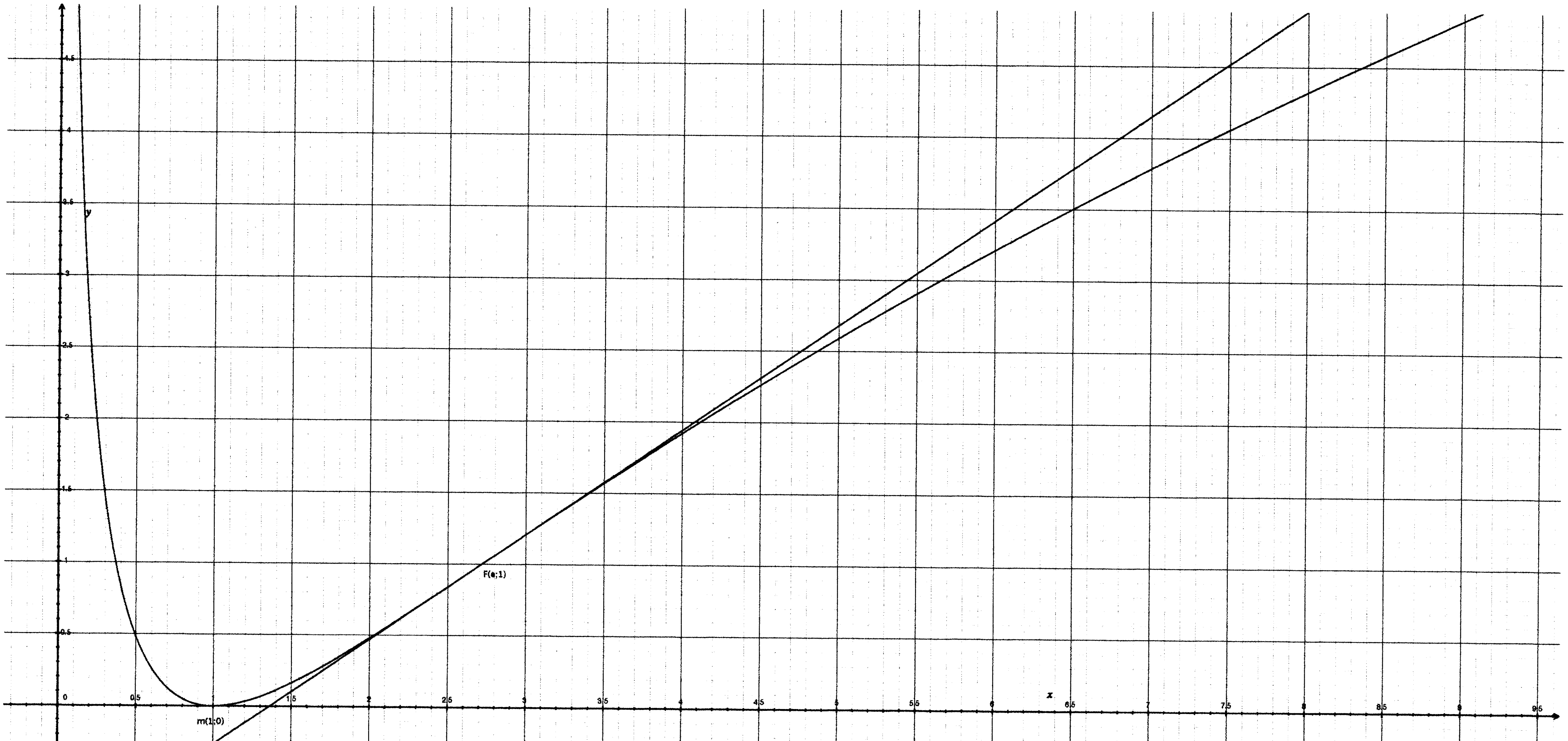
$\Downarrow$

In $x = 1$ non continua non derivabile

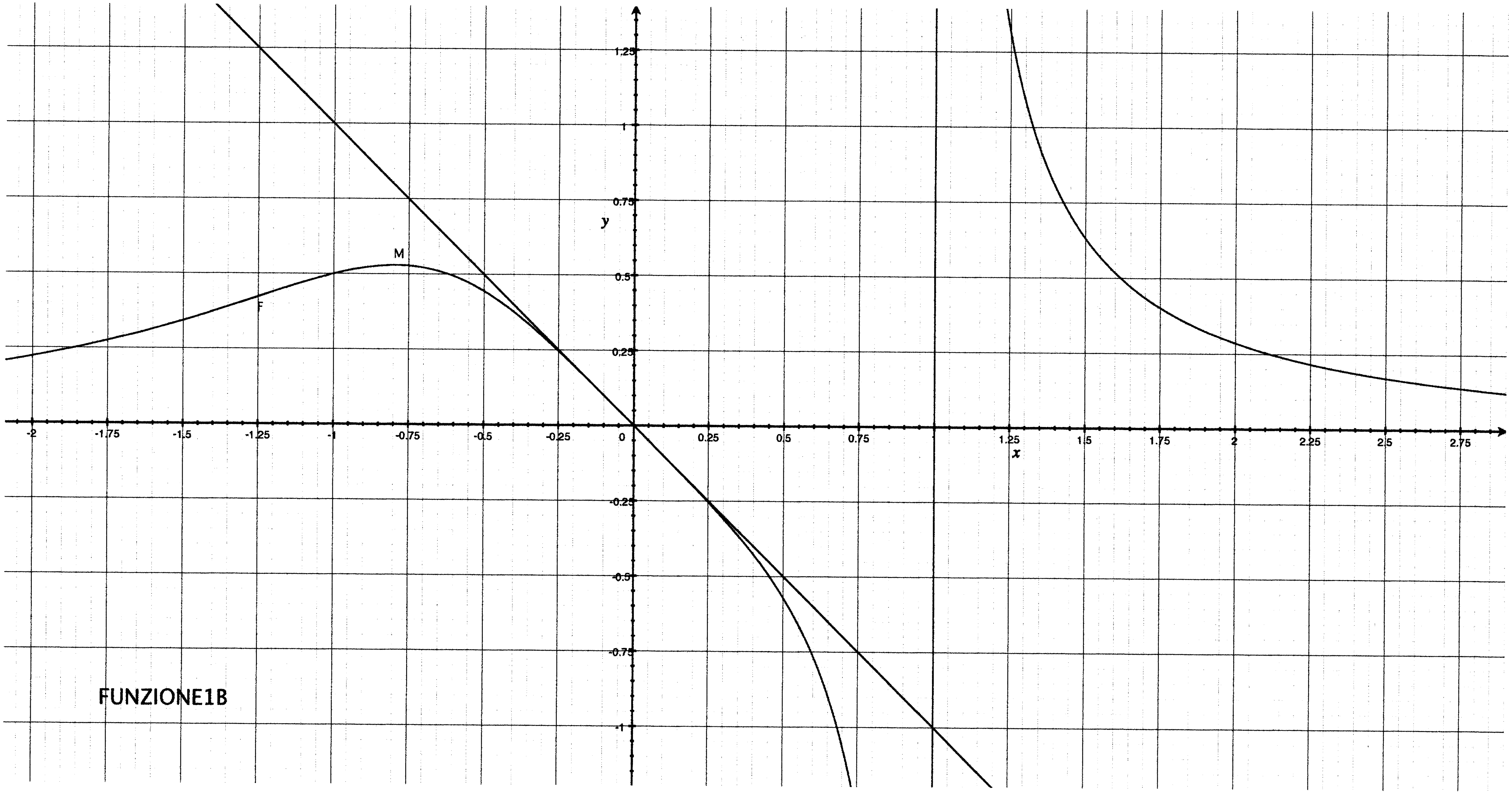
$\lim_{x\to e^-}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to e^+}(0) = 0$
$[y']_{x=e} = 0$
non coincidono

$\Downarrow$

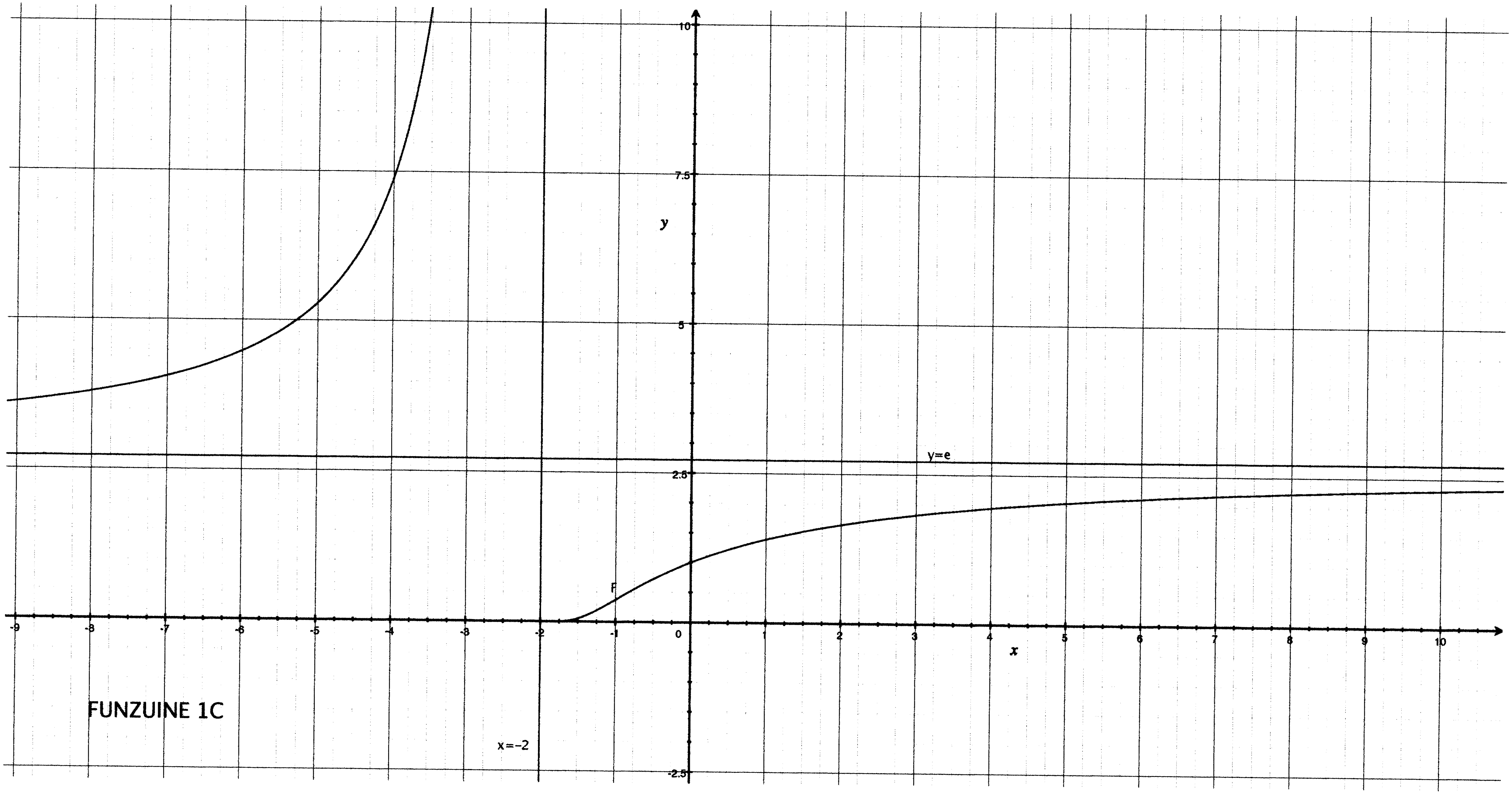
in $x = e$ la funzione è continua ma non derivabile



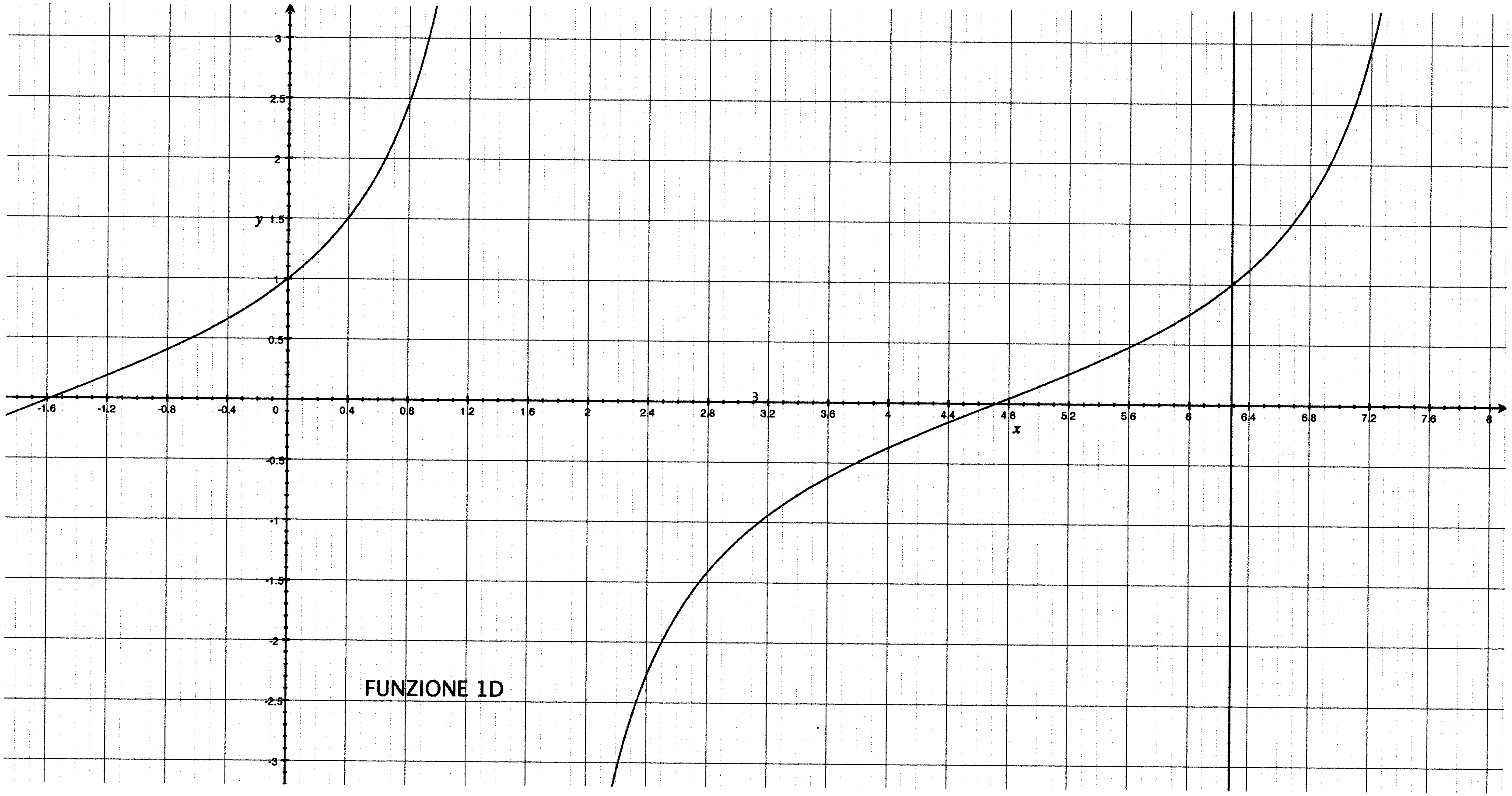
FUNZIONE 1A



FUNZIONE1B
M
F
x
y



FUNZUINE 1C
x=-2
y=e
F
x
y


FUNZIONE 1D
y
x